

UNIFORME CONTINUITÀ (aka continuità quantitativa)Setting: $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Def. (Funzione continua in A) Si dice che f è CONTINUA in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

vicini in partenza $\leadsto$ vicini in arrivo

Altro modo di dirlo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

↑ dipende da ε ed x Def. (Funzione uniformemente continua in A) Si dice che f è u.c. in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

↑ dipende solo da ε
e va bene per tutti gli x Morale: se voglio che $f(x)$ e $f(y)$ siano vicini a meno di ε , basta che prenda x e y vicini a meno di δ

Finestra sul futuro: la continuità è topologica (locale)

l'uniforme continuità è metrica (globale).

Esempio 1 Se f è Lipschitziana in A , allora f è u.c. in A

Sappiamo che $|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Prendo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ e sono sicuro che va bene.

Se $|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{L}$, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 2 $f(x) = x^2$ è u.c.? Dove?

in $[0, 2026]$ SÌ! Derivata limitata $\Rightarrow$ Lip $\Rightarrow$ u.c.

in $[0, +\infty)$ NO! Derivata non lim $\Rightarrow$ non Lip $\Rightarrow$ BOH!!

Uso definizione negata: devo trovare x e y "vicini" con immagini "distanti"

Prendo x e $y = x + \delta$

$$f(y) - f(x) = (x + \delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2$$

Se prendo $x = \frac{1}{\delta}$ ho trovato due p.ti x e y con $|y - x| \leq \delta$ e $f(y) - f(x) \geq 2$

Morale: se nella parabola vado molto a dx trovo p.ti vicini quanto voglio le cui immagini distano ≥ 2

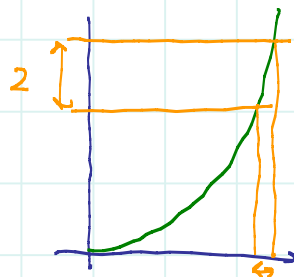
Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ è u.c. in $[0, +\infty)$?

SÌ! Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare δ universale.

Provo con $\delta = \varepsilon^2$. Se $|x - y| \leq \varepsilon^2$, allora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2}} = \varepsilon \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$ razion. $\uparrow$ almeno uno tra x e y è $\geq \varepsilon^2$



Morale: se voglio $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ lontani con $|x-y| \leq \delta$, il caso peggiore è quando $x=0$ e $y=\delta$. Quindi $\sqrt{\delta} = \varepsilon \rightsquigarrow \delta = \varepsilon^2$

Proprietà funz. unif. cont.

① Se f e g sono u.c. in $A \Rightarrow f+g$ è u.c. in A

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Prendo δ_1 t.c. $|x-y| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$
" δ_2 t.c. $|x-y| \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$

Prendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora se $|x-y| \leq \delta$ succede che

$$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| \leq \varepsilon \quad \text{c} \\ \leq \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \qquad \qquad \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

② Se f è u.c. in A e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$ è u.c. in A

Brutta: $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| \cdot \dots \leq \varepsilon$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Allora trovo $\delta > 0$ tale che

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

Concludo con lo stesso δ come nella brutta.

In realtà devo trattare a parte il caso $\lambda = 0$, ma non è difficile.

③ Se f e g sono u.c. in $A \Rightarrow f \cdot g$ è u.c. in A ?

NO! $f(x) = x = g(x)$ sono lip., quindi u.c. in $\mathbb{R}$, ma x^2 NO

④ Se f e g sono u.c. e limitate in $A \Rightarrow f \cdot g$ è u.c. in A

Brutta :

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M_f \cdot \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{M_f} + M_g \cdot \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{M_g} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Scelgo $\delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{M_g} \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{M_f}$$

(posso sempre supporre M_f e $M_g \geq 2026$)

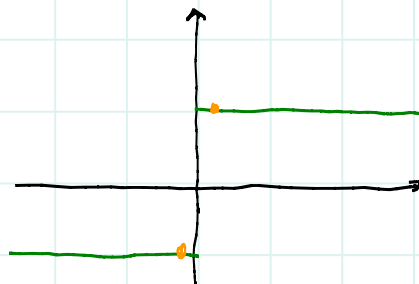
④.5 Domanda: e se solo una tra f e g è limitata?

⑤ Se f è u.c. in A e $B \subseteq A \Rightarrow f$ è u.c. in B ? Ovvio

⑥ f u.c. in A + f u.c. in $B \Rightarrow f$ è u.c. in $A \cup B$?

Oss. Per la continuità semplice è ovvio (la continuità è locale!)

Per u.c. NO!!



è u.c. in $(0, +\infty)$
e in $(-\infty, 0)$
ma non nell'unione!

6. safe $a < b < c$, f u.c. in $[a, b]$, f u.c. in $[b, c] \Rightarrow f$ u.c. in $[a, c]$?

SI! Prendo il $\delta > 0$ che garantisce $\frac{\varepsilon}{2}$ nei due sottointervalli e questo va bene [a voce nel video].