

Teorema (Tre facce della compattezza)

Per un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti i seguenti 3 fatti

- (i) A è chiuso + limitato (un giorno completo + tot. limitato)
- (ii) A è cpt. per succ.
- (iii) A è cpt. per ricoprimenti

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Dimostrato in una lezione precedente

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ipotesi: A è cpt. per ricoprimenti
Tesi: limitato + chiuso

Limitato Prendo $U_n := (-n, n)$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$

Ovvio che $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n = \mathbb{R}$

Per ipotesi esiste $m_0 \geq 1$ t.c. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m_0} U_n = (-m_0, m_0)$

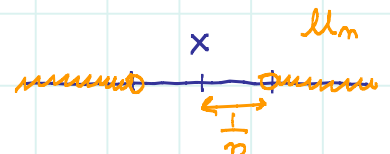
$\Rightarrow A$ è limitato.

Chiuso Prendo $x \in \text{Clos}(A)$. Voglio dim. che $x \in A$.

Se non ci stesse, considero

$$U_n = \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

$\uparrow$ aperto



Ora $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ (usiamo che $x \notin A$)

Ma allora esiste $m_0 \geq 1$ t.c. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m_0} U_n = \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{m_0}, x + \frac{1}{m_0}]$

Ma allora $[x - \frac{1}{2m_0}, x + \frac{1}{2m_0}] \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \text{Clos}(A)$.

Dim (i) $\Rightarrow$ (ii) implicando (iii)

LEMMA (Raggio magico) [Numero di LEBESGUE]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ cpt. per succ.

Sia $\{I_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A .

Allora

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists i \in I \quad [x-r, x+r] \subseteq I_i$$

↑
raggio magico

Brutalmente: ogni $x \in A$ sta "bello comodo" in almeno uno degli I_i ,
cioè ci sta insieme a tutto l'intervallo $[x-r, x+r]$.

LEMMA (dei distributori) [ϵ -rete]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato, e sia $\epsilon > 0$.

Allora esiste un numero finito di p.ti $x_1, \dots, x_n$ in A tali che

$$\forall x \in A \quad \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad |x - x_i| \leq \epsilon$$

Brutalmente: posso piazzare un numero finito di distributori in A
in modo che ogni p.to di A abbia un distributore
a distanza $\leq \epsilon$.

Dim (ii) $\Rightarrow$ (iii) usando i lemmi

Mi viene dato un ricoprimento $\{I_i\}_{i \in I}$. Voglio trovare un
s. ricopr. finito.

Prendo il raggio magico r del ricoprimento.

Scelgo $x_1, \dots, x_n$ come r -rete di distributori

Prendo $I_{i_1}, \dots, I_{i_n}$ che contengano gli n distributori
insieme al loro intorno di ampiezza r , cioè

$$[x_j - r, x_j + r] \subseteq I_{i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Claim: $I_{i_1}, \dots, I_{i_n}$ ricoprono.

Questo segue dal fatto che

→ ogni $x \in A$ sta in un qualche $[x_j - 2, x_j + 2]$

→ l'ultimo intervallo sta in M_i .

— o — o —

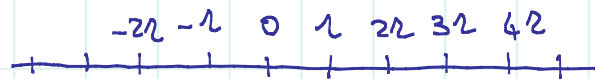
Dim. distributori

Basta considerare la griglia kz con $k \in \mathbb{Z}$
e gli intervalli $[kz, (k+1)z]$.

Solo un # finito di questi interseca A (che è limitato)

Prendo un x_i in ciascuna di queste intersezioni non vuote.

— o — o —



Dim. raggio magico

Tesi

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists i \in I \quad [x-r, x+r] \subseteq M_i$$

Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in A \quad \forall i \in I \quad [x-r, x+r] \not\subseteq M_i$$

↑ qualunque cosa che tende a 0.

Me la gioco con $r = \frac{1}{n}$. Trovo $x_n \in A$ t.c.

$$\forall i \in I \quad [x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}] \not\subseteq M_i \quad (*)$$

Ora ho una succ. $\{x_n\}$. Per ipotesi $\exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in A$

Prendo $i_\infty \in I$ tale che $x_\infty \in M_{i_\infty}$. Essendo aperto

$$\exists r_\infty > 0 \text{ t.c. } (x_\infty - r_\infty, x_\infty + r_\infty) \subseteq M_{i_\infty}$$



Ora gli x_{n_k} stanno

convergenza a x_∞ , quindi

per k grandi stanno belli comodi in M_{i_∞}

Più formale: per k grande $x_{n_k} \in [x_\infty - \frac{\epsilon}{2}, x_\infty + \frac{\epsilon}{2}]$
e quindi anche

$$[x_{n_k} - \frac{\epsilon}{2}, x_{n_k} + \frac{\epsilon}{2}] \subseteq M_{100}$$

il che contraddice la (*) non appena $\frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}$.

— o — o —

Prop Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è cpt. per ricoprimenti e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua,
allora $f(A)$ è cpt. per ricoprimenti.

Dim. Mi viene dato un ricoprimento aperto di $f(A)$, cioè

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

Voglio trovare un s.ric. finito.

Pongo $M_i := f^{-1}(V_i)$. Osservo che gli M_i sono aperti (per lo meno in A , perché f è continua, il che vuol dire che

$$f^{-1}(\text{aperto}) = \text{aperto in } A)$$

e ricoprono A , cioè

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$$

Poiché A è cpt. per ricoprimenti, esiste s.ricopr. finito, cioè

$$A \subseteq M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_m} \quad \text{con } i_1, \dots, i_m \in I.$$

$$\text{Claim: } f(A) \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$$

Praticamente ovvio: se $y \in f(A)$, prendo $x \in A$ t.c. $y = f(x)$,
prendo k t.c. $x \in M_{i_k}$ con $k = 1, \dots, m$ e deduco che

$$y \in f(M_{i_k}) = V_{i_k}.$$

— o — o —