

TEOREMA DI CESÀRO - STOLZ (aka Hopital per successioni)

Caso $\frac{0}{0}$ Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

(i) $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$

(ii) b_n strett. decrescente (in particolare $b_n > 0$ sempre)

Allora

$$\liminf \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Dim Come prima facciamo disug. di dx assumendo

$$\limsup \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \in \mathbb{R}$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Per caratt. trovo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_{m+1} - a_m}{b_{m+1} - b_m} \leq L + \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

He la aggiunto per avere denome > 0 e ottengo

$$\frac{a_m - a_{m+1}}{b_m - b_{m+1}} \leq L + \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

cioè

$$a_m - a_{m+1} \leq (L + \varepsilon)(b_m - b_{m+1}) \quad \forall m \geq m_0$$

Osservo che per ogni $m > n \geq m_0$ vale

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \leq (L + \varepsilon) \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) = (L + \varepsilon)(b_n - b_m)$$

↑
telescopica

e quindi

$$\frac{a_m - a_{m_0}}{b_m - b_{m_0}} \leq L + \varepsilon \quad \forall m > m_0 \geq m_0$$

Se ora faccio tendere $m \rightarrow +\infty$ ottengo

$$\frac{a_m}{b_m} \leq L + \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

e quindi

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{b_m} \leq L + \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ arbitrario.}$$

— o — o —

Caso $\frac{*}{\infty}$ Sempre a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

(i) $b_n \rightarrow +\infty$ (basta denom.)

(ii) b_n strett. cresc. [non basta $b_{n+1} \neq b_n$ o b_n iniettiva]

Allora solita cosa a 4.

Dim. Come al solito per ogni $\varepsilon > 0$ trovo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

cioè (ora posso moltiplicare)

$$a_{n+1} - a_n \leq (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

Adesso

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{m_0} + a_{m_0}}{b_n}$$

e come prima

$$a_n - a_{m_0} = \sum_{k=m_0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq (L + \varepsilon) \sum_{k=m_0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = (L + \varepsilon)(b_n - b_{m_0})$$

↑
telescopico

per ogni $n > m_0$. Riprendendo il conto

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{m_0} + a_{m_0}}{b_n} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_n - b_{m_0}) + a_{m_0}}{b_n}$$

$$= L + \varepsilon + \frac{a_{m_0} - (L+\varepsilon)b_{m_0}}{b_n}$$

$\downarrow$
 0

e quindi $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon$ con ε arbitrario $\therefore$

— 0 — 0 —

Applicazione 1: teorema delle medie di CESÀRO

Data una succ. a_n , poniamo $M_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

$\uparrow$
 media dei primi n termini

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf M_n \leq \limsup M_n \leq \limsup a_n$$

In particolare, se $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $M_n \rightarrow$ stesso l .

Oss. Può succedere che M_n abbia limite, ma a_n no.

(esempio classico: $a_n = (-1)^n$ e si verifica che $M_n \rightarrow 0$)

Dim. Pongo $A_n := a_1 + \dots + a_n$

$$\limsup M_n = \limsup \frac{A_n}{n} \leq \limsup \frac{A_{n+1} - A_n}{\underbrace{(n+1) - n}_1} = \limsup a_{n+1}$$

$\uparrow$
 c.s.

e idem per il $\liminf$.

Esercizi (Hard) $\rightarrow$ esiste a_n che resiste a 2026 step di cesàrizzazione e poi cede?

$\rightarrow$ esiste a_n che resiste a ∞ step?

Applicazione 2: rapporto $\rightarrow$ radice $\sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{1}{n} \log a_n}$

Pongo $A_n = \log a_n$ $B_n = n$. Allora

$$\limsup \frac{\log a_n}{n} = \limsup \frac{A_n}{B_n} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \limsup \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n}$$

$$\limsup \log(\sqrt[n]{a_n}) = \limsup \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Fatto importante Se $\limsup a_n \leq L$, posso dedurre che $\limsup f(a_n) \leq f(L)$?

E analogo per il $\liminf$?

No in generale: $a_n = 0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \dots$ $\limsup a_n = \frac{\pi}{2}$

$$\cos a_n = 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$\limsup \cos a_n = 1$$

SI se f è CONTINUA e DEBOLMENTE CRESCENTE

$\forall \varepsilon > 0$ vale $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente.

Quindi $f(a_n) \leq f(L + \varepsilon)$ definitivamente.

da cui

$$\limsup f(a_n) \leq f(L + \varepsilon)$$

ora passo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Applicazione 3 Sia $x_{n+1} = \sin(x_n)$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Si vede che $a_n \rightarrow 0^+$.

Domanda: parte principale?



Euristica: Supponiamo $x_n = \frac{c}{n^a}$ voglio trovare c ed a

Sostituisco

$$\frac{c}{(n+1)^a} = \sin\left(\frac{c}{n^a}\right) \sim \frac{c}{n^a} - \frac{1}{6} \frac{c^3}{n^{3a}}$$

Moltiplico per n^a e divido per c

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^a = 1 - \frac{1}{6} \frac{c^2}{n^{2a}}$$

$$\stackrel{||}{\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^a}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} \sim 1 - \frac{a}{n}$$

Quindi $\cancel{1} - \frac{a}{n} \sim \cancel{1} - \frac{1}{6} \frac{c^2}{n^{2a}} \Rightarrow \underbrace{a = \frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \text{aggiusto} \\ \text{gli esponenti}}} \quad c = \sqrt{3}$

CLAIM: $x_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$, cioè $x_n^2 \sim \frac{3}{n}$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 \cdot n = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 \cdot n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \stackrel{\text{C.S.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = 3 \quad \text{☺}$$

Analogo: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ $x_0 = 2026$ $x_n \rightarrow +\infty$ Ma come?