

Da CAUCHY / HOPITAL a TAYLOR

Caso con centro in $x_0 = 0$ (quello generale si ottiene considerando la funzione $g(x) = f(x_0 + x)$)

↑ corretto dopo video

$$P_m(x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

TAYLOR PEANO Sia $r > 0$ e $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $m \in \mathbb{N}$ (ordine dello sviluppo)

Supponiamo che

(i) f è derivabile $m-1$ volte in $(-r, r)$

(ii) f è derivabile n volte in $x=0$

Allora

$$f(x) = P_m(x) + o(x^m) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

TAYLOR LAGRANGE Stesso setting di sopra

Supponiamo che

(i) f è derivabile $m+1$ volte in $(-r, r)$.

Allora per ogni $x \in (-r, r)$ esiste c compreso tra 0 ed x (x potrebbe essere anche negativo) tale che

$$f(x) = P_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1} \quad (c \text{ dipende da } x)$$

ROAD MAP

→ Caratterizzazione di $P_m(x)$

→ Finale diverso per le due dimostrazioni.

CARATTERIZZAZIONE

$P_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che le sue derivate di ordine $k = 0, 1, \dots, n$ coincidono in $x=0$ con quelle di $f(x)$.

STEP 1 (Derivata di un monomio)

$$\frac{d^i}{dx} (x^k) = \frac{k!}{\underbrace{(k-i)!}_{k(k-1)\dots(k-i+1)}} x^{k-i}$$

Formalmente si dimostra per induzione su i .

In particolare, se calcolo per $x=0$, viene $\begin{matrix} \nearrow k! & \text{se } i=k \\ \searrow 0 & \text{altrimenti} \end{matrix}$

STEP 2 (Derivata di un polinomio)

Sia

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

un polinomio.

Allora la sua derivata i -esima in $x=0$ è $a_i \cdot i!$

Dim: uso la derivata del monomio e somma.

CONCLUSIONE

La derivata i -esima del pol. di Taylor di f , calcolata in $x=0$, è

$$i! \cdot \boxed{\frac{f^{(i)}(0)}{i!}} = f^{(i)}(0)$$

$\uparrow$
coeff. di x^i nel
pol. di Taylor

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) := f(x) - P_m(x)$$

Questa soddisfa

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \text{ per ogni } k = 0, 1, \dots, m \quad (*)$$

FINALE PEANO Sia $\varphi: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) φ è derivabile $(m-1)$ volte in $(-r, r)$

(ii) " " m volte in $x=0$

(iii) φ verifica (*).

Allora

$$\varphi(x) = o(x^m) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Dimo. Dovo dim. che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0$.

Uso Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^m} &\stackrel{\substack{\uparrow \\ [0/0]}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{m x^{m-1}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ [0/0]}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi''(x)}{m(m-1) x^{m-2}} \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{m! x} \end{aligned}$$

Con un colpo di Hôp finisci, ma non posso perché sono stato tirchio con le ipotesi (servirebbe $\varphi^{(m)}(x)$ in tutto l'intervallo)

Mi salvo usando la def. di derivata

$$\frac{1}{m!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x) - \varphi^{(m-1)}(0)}{x} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{derivata}}}{=} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) = 0$$

FINALE LAGRANGE

Sia $\varphi: (-2,2) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) φ è derivabile $n+1$ volte in $(-2,2)$

(ii) φ verifica (*)

Allora per ogni $x \in (-2,2)$ esiste c , compreso tra 0 e x (sketch traume nel caso $x=0$) tale che

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Dim Uso Cauchy



$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} &= \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)c_1^n} = \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(0)}{(n+1)c_1^n - (n+1)0^n} \\ &\quad \uparrow \text{Cauchy con } g(x) = x^{n+1} \\ &= \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)n c_2^{n-1}} \\ &\quad \uparrow \text{Cauchy in } [0, c_1] \text{ con } g(x) = x^n \end{aligned}$$

Proseguo allo stesso modo finché al denominatore la derivata viene "senza c". A quel punto al num. ho $\varphi^{(n+1)}(c_n)$ e al denom. ho $(n+1)!$

— o — o —

Oss Se voglio dire "meno con i puntini" devo fare induzione su n . In questo caso l'enunciato che si dimostra è " $\forall \varphi$ tale che ... vale la tesi "

Caso Base $n=1$ è la definizione di derivata

Supponiamo vero per n e dimostriamo per $n+1$. Prendiamo φ che ha n derivate in $(-2,2)$ e $n+1$ in $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} \stackrel{\text{H\^op}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{(n+1)x^n}$$

e ora applico l'ipotesi induttiva a φ'

Curiosità

Taylor - Lagrange si può deriv. direttamente da Rolle.

Idea

Scrivo

$$f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (a-x_0)^k = R_n (a-x_0)^{n+1}$$

e voglio trovare $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$

Introduco la funzione (metto x al posto di x_0)

$$\varphi(x) := f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (a-x)^k - R_n (a-x)^{n+1}$$

Osservo che $\varphi(a) = 0$ (nella sommatoria resta solo $k=0$)
 $\varphi(x_0) = 0$ (perché LHS-RHS di sopra)

Quindi per ROLLE esiste c t.c. $\varphi'(c) = 0$.

Facendo i conti si ha la tesi.

— 0 — 0 —