

FIL ROUGE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Assiommi di $\mathbb{R} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}$

$\downarrow$
H
 $\downarrow$
T
 $\downarrow$
M

WEIERSTRASS

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HOPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

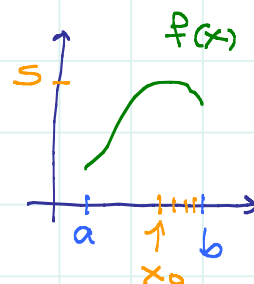
estremi compresi

Teorema di W (Versione light) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$



ROAD MAP VIA ORDINAMENTO (per il max)

Di sicuro esiste

$$S := \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

↑ qui serve l'assioma di continuità

Poi si può

$$x_0 := \inf \{ c \in [a, b] : S = \sup \{ f(x) : x \in [a, c] \} \}$$

↑ non vuoto perché b ci sta

Claim: $f(x_0) = S$

→ chiaramente $f(x_0) \leq S$

→ se fosse $f(x_0) < S$, trovo un assurdo perché il sup sarebbe $< S$ anche un po' a dx di x_0 .

— o — o —

Dove possono i p.ti di max/min

- ① stat. interni: $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) = 0$
- ② sing. interni: $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste
- ③ bordo: $x_0 \in \{a,b\}$

— o — o —

Teorema di ROLLE Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

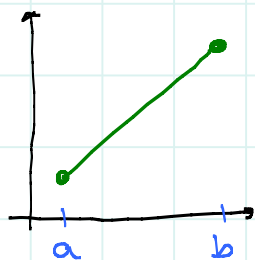
Supponiamo che

- (i) f continua su $[a,b]$ (estremi compresi)
- (ii) f derivabile in (a,b) (se è derivabile pure in $[a,b]$ meglio)
- (iii) $f(a) = f(b)$

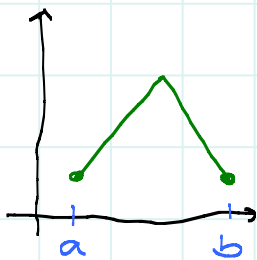
Allora

$$\exists c \in (a,b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

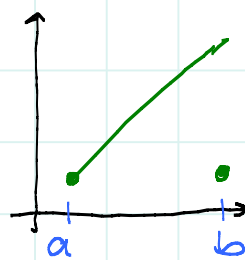
Oss. Servono davvero le ipotesi?



Manca (iii)



Manca (ii)
in un solo
p.to



Manca (i) solo in
un estremo

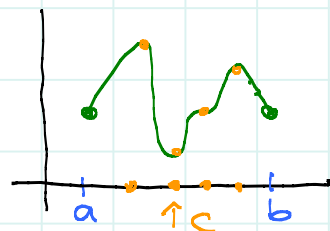
Dim. Per W. max e min esistono

→ Se un p.to di max o un p.to di min sta in (a,b) , allora ecco il c voluto (per forza è in categoria ①)

→ Se max e min stanno al bordo, per l'ipotesi (iii) f è costante, ma allora vanno bene tutti i $c \in (a,b)$.

— o — o —

Oss. Il c di Rolle non è nec.
unico



Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) f e g continue in $[a,b]$,
- (ii) " derivabili in (a,b) .

Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

1^a tesi

Se inoltre $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (terza ipotesi)
allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2^a tesi

L'ESEMPIO $[a,b] = [-1, 1]$ $f(x) = x^3$ $g(x) = x^2$

$$\underbrace{(f(b) - f(a))}_{\neq 0} g'(c) = \underbrace{(g(b) - g(a))}_{=0} f'(c)$$

Per forza $g'(c) = 0$, quindi $c = 0$ che funziona in quanto anche $f'(0) = 0$.

Tuttavia la seconda tesi non funziona.

Dim Considero la funzione

$$\varphi(x) := (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

Osservo che $\varphi(a) = \varphi(b)$ (basta sostituire) e quindi
 $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ verifica le ipotesi di ROLLE. Ma allora
 $\exists c \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(c) = 0$ no 1^a tesi

Per la seconda tesi: se fosse $g(b) = g(a)$, allora g verificherebbe le hp di Rolle, quindi $\exists c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$
 $\leadsto g$ non verifica la 3^a ipotesi.
— o — o —

Teorema di LAGRANGE Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$

(ii) f derivabile in (a,b)

Allora

$$\exists c \in (a,b) \text{ t.c. } f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

DIM 1 Riscrivo la tesi come

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$$

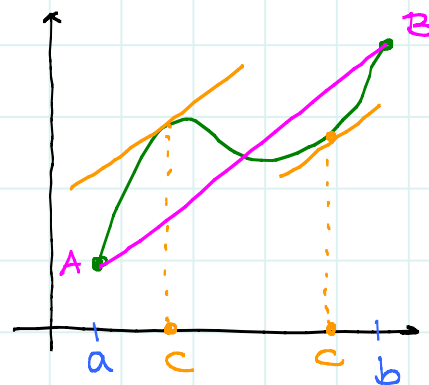
e questo è Cauchy con $g(x) = x$ (seconda tesi)

Oss. Interpretazione geometrica.

Nella tesi scritta

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \text{coeff. ang. retta AB}$$

Lagrange: $\exists c \in (a,b)$ t.c. la
retta tangente al grafico in c
è parallela ad AB



DIM 2 Considero $\varphi(x) = f(x) - \text{retta}$. Allora $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Quindi posso applicare ROLLE a $\varphi(x)$ ottenendo $c \in (a,b)$ t.c.

$\varphi'(c) = 0$. Ma $\varphi'(c) = f'(c) - \text{coeff. ang. retta} \leadsto$ tesi

Oss. Ho riciclato la dim. di Cauchy nel caso specifico.

Oss. Nuova dim. di Cauchy

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

$$g(b) - g(a) = g'(c) \cdot (b-a)$$

Divido e ottengo Cauchy

FAKE !!! Il c sopra e sotto sono DIVERSI !!
— o — o —