

Caratterizzazione con le successioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$(1) x_0 \in \text{Int}(A) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} \quad [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n \in A \text{ definitivamente}]$$

$$(2) x_0 \in \text{Clos}(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \quad x_n \rightarrow x_0$$

$$(3) x_0 \in \partial A \Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists \{x_n\} \subseteq A \quad x_n \rightarrow x_0 \\ &\exists \{\hat{x}_n\} \subseteq \mathbb{R} \setminus A \quad \hat{x}_n \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

$$(4) x_0 \in \text{Isol} A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq A \quad [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n = x_0 \text{ definitivamente}]$$

$$(5) x_0 \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \quad x_n \rightarrow x_0$$

Dim (2) $\Leftarrow$ Ipotesi: $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x_0$

Tesi: $\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$

Mi viene dato $r > 0$. Per def. di limite $x_n \in (x_0 - r, x_0 + r)$ definitivamente.
Visto che $x_n \in A$ l'intersezione contiene addirittura ∞ elementi!

$\Rightarrow$ Ipotesi: $\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$

Tesi: $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x_0$

Mi gioco l'ipotesi con $r = \frac{1}{n}$. Trovo $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap A$
Questo ci dice che $x_n \in A$ e $x_n \rightarrow x_0$ (per i Carabinieri)

Oss. Al posto di $\frac{1}{n}$ bastava qualunque cosa che tendeva a 0.

Esercizio Dim. le altre equivalenze.

Linguaggio topologico relativo

Setting $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$

Def. Si dice che x_0 è interno ad A , relativamente a B , e si scrive $x_0 \in \text{Int}_B(A)$ se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \cap B \subseteq A$$

Si dice che A è aperto relativamente a B se $A = \text{Int}_B(A)$

Oss. Voleendo si può definire tutto il resto: $\text{Clos}_B(A)$, $\partial_B A$, ...

L'ESEMPIO $B = [0, 2]$ $A = (1, 2]$

Ora A è aperto relativamente a B $\ddot{}$

Basta usare un qualunque raggio $r \in (0, 1)$ e la pallina con centro in 2 è contenuta in A .



Quello che è fuori da B NON ESISTE.

Prop. Gli aperti in A relativamente a B sono le intersezioni di B con i "veri aperti" di $\mathbb{R}$

Nell'esempio: $(1, 2] = \underbrace{[0, 2]}_B \cap \underbrace{(1, 127)}_{\text{vero aperto di } \mathbb{R}}$

Un giorno ... B è NON connesso se e solo se è unione disgiunta di due aperti $\neq \emptyset$ relativamente a B stesso

QUATTRO FACCE DELLA CONTINUITÀ

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$

Cosa vuol dire che f è continua in x_0

(1) (Def. ε/δ)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

(2) (Con le successioni)

$$\forall \{x_n\} \subseteq A \quad [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)]$$

(3) (Con i limiti) gratis se $x_0 \in \text{Isd}(A)$

$$\text{altrimenti } x_0 \in D(A) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(4) (Con gli aperti)

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto con } f(x_0) \in U \text{ si ha che } x_0 \in \underset{\substack{\uparrow \text{A} \\ \uparrow \downarrow}}{\text{Int}}(f^{-1}(U))$$

(la controimmagine di un aperto che contiene $f(x_0)$ ha x_0 come p.to interno relativamente ad A)

Def. La funzione f è continua in A se

$$(1) (\varepsilon/\delta) \quad \forall x_0 \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$$(2) (\text{succ.}) \quad \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } x_n \rightarrow x_0 \text{ si ha } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

$$(3) (\text{limiti}) \quad \text{per ogni } x_0 \in D(A) \text{ vale che } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$(4) (\text{Aperti}) \quad \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto} \quad f^{-1}(U) \text{ è aperto relativ. ad } A$$

Dim equiv. ε/δ e succ.

$\Rightarrow$ Ipotesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Tesi: se $x_n \rightarrow x_0$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Dim. devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale $f(x_n) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ definitivamente.

Mi viene dato ε , prendo il δ corr. dell'ipotesi, osservo che

$x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ definitivamente. (perché $x_n \rightarrow x_0$)

e quindi per questi n vale che

$f(x_n) \in$ intervallo in cui deve stare

$\Leftarrow$ Ipotesi: se $x_n \rightarrow x_0$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Dim Per assurdo supp. non sia vero. Allora

$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Me la gioco con $\delta := \frac{1}{n}$. Mi ritrovo un p.to $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap A$ tale che

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Ma allora $x_n \rightarrow x_0$ per i Carabiniere, ma $f(x_n)$ non può tendere a $f(x_0)$.

— o — o —

Utilità Se f e g sono continue, allora $x \rightarrow g(f(x))$ è continua

Dim Sia $x_n \rightarrow x_0$. Per continuità di f avevamo che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Per continuità di g avevamo che $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$.

— o — o —