

Linguaggio topologico in $\mathbb{R}$ (ma buono fino a SPAZIO METRICO)

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$

(1) Si dice che x_0 è **INTERNO** ad A se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

(tutto un intorno del p.to sta in A)

(2) Si dice che x_0 è **ADERENTE** ad A se

$$\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$$

(ogni intorno di x_0 tocca A)

(3) Si dice che x_0 è di **FRONTIERA** o sul **BORDO** di A

$$\begin{aligned} \forall r > 0 \quad & (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset \\ & (x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \end{aligned}$$

(ogni intorno di x_0 tocca sia A sia il compl.)

(4) Si dice che x_0 è **ISOLATO** in A se

$$\exists r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A = \{x_0\}$$

(sta in A ma non ha vicini)

(5) Si dice che x_0 è di **ACCUMULAZIONE** per A se

$$\forall r > 0 \quad [(x_0 - r, x_0 + r) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

(in ogni intorno di x_0 esistono p.ti di A diversi da x_0)

Def. (terminologia) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ poniamo

- $\text{Int}(A)$ oppure $\overset{\circ}{A}$ è l'insieme dei pti interni ad A
- $\text{Clos}(A)$ oppure $\bar{A}$ " aderenti ad A
- ∂A ($\setminus \text{partial } A$) " di frontiera di A
- $\text{Isol}(A)$ " isolati di A
- $D(A)$ (derivato di A) " di accumulazione di A

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- **APERTO** se $A = \text{Int}(A)$
- **CHIUSO** se $A = \text{Clos}(A)$

Oss. banali Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$

$$(1) \text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \text{Clos}(A)$$

$$(2) \partial A \subseteq \text{Clos}(A)$$

$$(3) \text{Clos}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A \text{ con unione disgiunta}$$

$$(4) \text{Clos}(A) = \text{Isol}(A) \cup D(A) \text{ con unione disgiunta}$$

Dim (3) Sia $x_0 \in \text{Clos}(A)$. Questo vuol dire $\forall \varepsilon > 0 \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Ci sono due casi

$$\rightarrow \text{se } \forall \varepsilon > 0 \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \rightsquigarrow x_0 \in \partial A$$

$$\rightarrow \text{se } \exists \varepsilon > 0 \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset, \text{ allora} \\ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A \rightsquigarrow x_0 \in \text{Int}(A)$$

$$\text{Dim (4)} \rightarrow \text{se } \forall \varepsilon \ [(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \rightsquigarrow x_0 \in D(A)$$

$$\rightarrow \text{se } \exists \varepsilon \quad \quad \quad = \emptyset$$

$$\text{Ma allora } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{x_0\} \rightsquigarrow x_0 \in \text{Isol}(A)$$

Esempi $A = [0, 1)$

$$\text{Int}(A) = (0, 1)$$

$$\text{Clos}(A) = [0, 1]$$

$$\partial A = \{0, 1\}$$

$$\text{Isol}(A) = \emptyset$$

$$D(A) = [0, 1]$$

$$B = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\}$$

$$\text{Int}(B) = (0, 1) \cup (1, 2)$$

$$\text{Clos}(B) = [0, 2] \cup \{3\}$$

$$\partial B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{Isol}(B) = \{3\}$$

$$D(B) = [0, 2]$$

$$\text{Int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$$

$$\text{Clos}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$\text{Isol}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$D(\mathbb{Z}) = \emptyset$$

$$\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

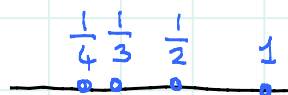
$$\text{Clos}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\text{Isol}(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

$$D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

$$A = \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}$$



$$\text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\text{Clos}(A) = A \cup \{0\}$$

$$\partial A = A \cup \{0\}$$

$$\text{Isol}(A) = A$$

$$D(A) = \{0\}$$

Esercizi (Harold) Costruzioni iterate.

Quanti insiemi diversi posso ottenere con queste costruzioni?

$$(1) A \rightarrow \text{Int}(A) \rightarrow \text{Clos}(\text{Int}(A)) \rightsquigarrow \text{Int}(\text{Clos}(\text{Int}(A))) \rightarrow \dots$$

$$(2) A \rightarrow \text{Clos}(A) \rightarrow \text{Int}(\text{Clos}(A)) \rightarrow \text{Clos}(\text{Int}(\text{Clos}(A))) \rightarrow \dots$$

$$(3) A \rightarrow \partial A \rightarrow \partial \partial A \rightarrow \dots$$

$$(4) A \rightarrow D(A) \rightarrow D(D(A)) \rightarrow D(D(D(A))) \rightarrow \dots$$

Unioni / intersezioni

- (1) Se A e B sono aperti, allora $A \cap B$ e $A \cup B$ sono aperti
(2) Se A e B sono chiusi, allora $A \cap B$ e $A \cup B$ sono chiusi
 $\leadsto$ per inclusione vale per unioni / intersezioni **FINITE**

Dim. $A \cap B$ aperto

$$A \text{ aperto} \quad \forall x_0 \in A \quad \exists r_A (x_0 - r_A, x_0 + r_A) \subseteq A$$

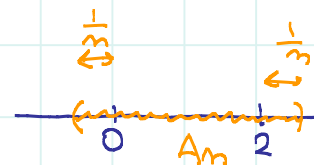
$$B \text{ aperto} \quad \forall x_0 \in B \quad \exists r_B (x_0 - r_B, x_0 + r_B) \subseteq B$$

Ora se $x_0 \in A \cap B$ basta usare $r := \min\{r_A, r_B\}$ e di sicuro
 $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A \cap B$

- (3) L'unione di ∞ aperti è un aperto
(4) L'intersezione di ∞ chiusi è chiusa

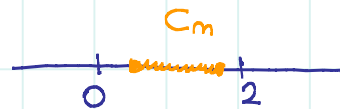
Achtung! L'intersezione di ∞ aperti può non essere un aperto

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n = [0, 2]$$



L'unione di ∞ chiusi può non essere chiusa

$$C_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \quad \bigcup_{n \geq 2026} C_n = (0, 2)$$



Oss. $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$?

$\supseteq$ è banale

$\subseteq$ puzza! $A = (0, 1)$ $B = [1, 2)$

— o — o —