

Limsup / Liminf di funzioni

Facciamo un caso: $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$

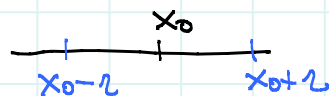
(varianti con x_0^+ , x_0^- , $+\infty$, $-\infty$)

Prerequisito: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ e

$$\forall r > 0 \quad \underbrace{(D \cap [x_0 - r, x_0 + r]) \setminus \{x_0\}}_{I_{x_0, r}} \neq \emptyset$$

Se $\forall r > 0$ si ha che $\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\} = +\infty$, allora per definizione

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$



Altrimenti $\exists r_0 > 0$ t.c. $\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r_0}\} < +\infty$
e allora si pone

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \underbrace{\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\}}_{\substack{\text{sono finiti appena } r \leq r_0 \\ \text{e "decregono" quando } r \rightarrow 0^+ \\ \text{(funzione deb. cresc. di } r\text{)}}} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Lo stesso schema si applica al liminf.

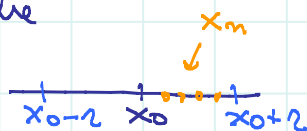
Definizione via maxlim

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \exists x_m \rightarrow x_0 \text{ con } x_m \in D \text{ e } x_m \neq x_0$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_m) \rightarrow +\infty$

Dim $\Leftarrow$ è abbastanza chiaro che $\forall r > 0$ si ha che

$$\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\} = +\infty$$



Quindi in ogni $I_{x_0, r}$ la $f(x)$ assume valori grandi a piacere visto che $x_n \in I_{x_0, r}$ definitivamente.

$\Rightarrow$ Ipotesi $\sup \{ f(x) : x \in I_{x_0, r} \} = +\infty \quad \forall r > 0$

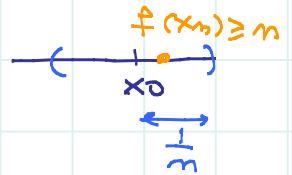
Tesi $\exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } f(x_n) \rightarrow +\infty$

Mi gioco l'ipotesi con $r = \frac{1}{n}$ (basta qualunque cosa $\rightarrow 0$)
e trovo $x_n \in I_{x_0, \frac{1}{n}}$ t.c. $f(x_n) \geq n$ (basta q.c. $\rightarrow +\infty$)

Da qui per confronto

$$x_n \rightarrow x_0$$

$$f(x_n) \rightarrow +\infty$$



$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

(Idea: prendo tutte le succ. $x_n \rightarrow x_0$ t.c. $f(x_n)$ ha limite
Scrivo tutti i possibili limiti
di tutti questi limiti prendo il più grande
Quello è il Maxlim.)

Esempio $\sin(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow 0^+$. Scegliendo bene $x_n \rightarrow 0^+$
posso ottenere che $\sin(\frac{1}{x_n}) \rightarrow l$ con un
qualunque $l \in [-1, 1]$
minlim. $\uparrow$ Maxlim

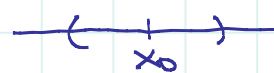
- Per ogni $x_n \rightarrow x_0$, se $f(x_n)$ ha limite, allora questo è $\leq L$
- Esiste $x_n \rightarrow x_0$ tale che $f(x_n) \rightarrow L$

Dim. il secondo pallino Sappiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$,
 $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (0, \delta)$
 $f(x) \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in I_{x_0, r}$
 $f(x) \geq L - \varepsilon$ in almeno un p.to di $I_{x_0, r}$

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $\delta = \frac{1}{n}$ e trovo x_n tale che

$$L - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq L + \frac{1}{n} \quad x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$$

Ora basta passare al limite.



↑
sempre $\leq L + \varepsilon$
almeno una volta $\geq L - \varepsilon$

— o — o —

Come si dimostra un limsup.

SLOGAN : $\rightarrow$ Disuguaglianza dall'alto
 $\rightarrow$ sottosucc. dal basso

Esempio 1 $a_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{8n + \sin n}$

CLAIM: $\limsup = \frac{1}{8}$

• Disug. dall'alto : $\frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{8n + \sin n} \leq \boxed{\frac{n + \sqrt{n}}{8n + \sin n}}$
 $\downarrow$
 $\frac{1}{8}$

Questo dice che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \frac{1}{8}$

• Sottosucc. dal basso : basta trovare $a_{n_k} \rightarrow \frac{1}{8}$ e a quel p.to

$$\limsup a_n = \max a_n \geq \frac{1}{8}$$

Qui basta a_{2n} .

Per il liminf: $\rightarrow$ disug. dal basso
 $\rightarrow$ s. succ. dall'alto.

Esempio 2 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sin x \cdot \cos \frac{1}{x}}_{f(x)}$

CLAIM: viene 1

• Disug. dall'alto: $\sin x \cdot \cos \frac{1}{x} \leq 1 \leadsto \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1$

• S. succ. dal basso: devo trovare $x_m \rightarrow +\infty$ t.c. $f(x_m) \rightarrow 1$
il che direbbe che $\max \lim \geq 1$.

Basta prendere $x_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

Per il liminf = -1 userei $f(x) \geq -1$ e poi $x_m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$

Esempio 3 $f(x) = \cos x + \cos \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+$

LIMSUP = 2

• Disug. dall'alto $f(x) \leq 2 \quad \therefore$

• Succ. dal basso: serve $x_m \rightarrow 0^+$ t.c. $f(x_m) \rightarrow 2$

$x_m = 2\pi m$ (non tende a 0^+ $\therefore$)

$x_m = \frac{1}{2\pi m}$

$$f(x_m) = \underbrace{\cos \frac{1}{2\pi m}}_{\substack{\downarrow \\ \cos(0)=1}} + \underbrace{\cos(2\pi m)}_{=1}$$

LIMINF = 0

• Disug. dal basso $f(x) \geq \underbrace{\cos x - 1}_{\downarrow 0}$
quindi $\liminf f(x) \geq 0$

• S. succ. dall'alto

$x_m = \frac{1}{\pi + 2m\pi} \rightarrow 0^+ \quad \text{e} \quad f(x_m) \rightarrow 0$

Esempio 4

$$f(x) = \cos x + \cos^2 \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\boxed{\text{LIMSUP} = 2}$$

- $f(x) \leq 2$
- $x_n = 2\pi n$

$$\boxed{\text{LIMINF} = 0}$$

- $f(x) \geq -1 + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \leadsto \text{Liminf} \geq 0$

- $x_n = 2\pi n + \pi$

— 0 — 0 —