

Limsup ① $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{a_k : k \geq n\}$

② $\inf \{M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \text{ definitiv.}\}$

③ $\text{Max} \{ \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ ha limite in } \bar{\mathbb{R}} \}$

Radice Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definitiv.

(i) Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$

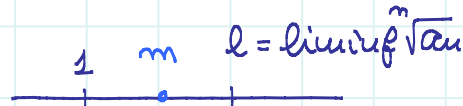
(ii) Se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(iii) Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora BOH.

Dim (caso (i))

Scelgo m tale che $1 < m < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Per caratt. $\sqrt[n]{a_n} \geq m$ definitiv., ma allora $\underbrace{a_n}_{\rightarrow +\infty} \geq \underbrace{m^n}_{\rightarrow +\infty}$ definitiv.



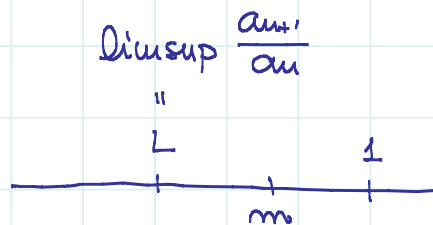
Rapporto Sia $a_n > 0$ definitiv. Allora

(i) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$

(ii) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(iii) BOH come sopra

Dim caso (ii)



Per caratt. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq m$ defn., cioè

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq m$$

Da qui per induzione $a_n \leq a_{m_0} \cdot m^{n-m_0} \quad \forall n \geq m_0$
e quindi

$$\underbrace{0}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{a_n}_{\downarrow 0} \leq a_{m_0} \cdot \underbrace{m^{n-m_0}}_{\downarrow 0 \text{ perché } m < 1}$$

Rapporto $\rightarrow$ Radice Sia $a_n > 0$ definitiv.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In particolare, se il rapporto ha limite, allora sono tutti uguali, e quindi pure la radice ha lo stesso limite

Domanda: posso fare in modo che i 4 numeri siano $1 \leq 3 \leq 42 \leq 2026$?

Dim. Il $\leq$ centrale è ovvio. Dimostriamo il $\leq$ di dx, e l'altro sarà simmetrico.

Se $\limsup = +\infty$, allora è ovvio

Se $\limsup = -\infty$, questo caso non si pone perché $a_n > 0$

Quindi $\limsup = L \in \mathbb{R}$

Allora per caratt.

$$\begin{array}{c} | \quad | \\ L \quad L+\varepsilon \end{array}$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon \quad \text{da cui come prima}$$

$$a_n \leq a_{m_0} (L+\varepsilon)^{n-m_0} = \frac{a_{m_0}}{(L+\varepsilon)^{m_0}} (L+\varepsilon)^n$$

Facendo la radice n -esima:

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}$$

$\downarrow$
1

Faccio $\limsup$ a $\downarrow x$ e $\uparrow x$. A $\downarrow x$ ho in realtà un limite e ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$$

Essendo vero $\forall \varepsilon > 0$, questo completa la disug. di destra.

Esercizio Dimostrare la disug. di $\uparrow x$

Oss. Confrontare con la dim. "vecchia" pre $\limsup$.

Il problema era nell'ultimo passo in cui non sapevamo ancora che $\sqrt[n]{a_n}$ aveva limite.

TEOREMI ALGEBRICI

Il $\limsup$ della somma NON è la somma dei $\limsup$.

Esempio classico: $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$a_n + b_n = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

$$\limsup a_n = \limsup b_n = \lim (a_n + b_n) = 1 \quad \text{☹}$$

Teo. somma In questo caso vale

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

TRANNE nei casi in cui c'è $+\infty - \infty$

Dim Centrale ovvio. Dim il dx (l'altro è simmetrico)

Se almeno uno tra $\limsup a_n$ e $\limsup b_n$ è $+\infty$, e l'altro non è $-\infty$, allora è ancora ovvio.

Nel caso rimanente poniamo

$$S_n^a := \sup \{a_k : k \geq n\}$$

$$S_n^b := \sup \{b_k : k \geq n\}$$

$$S_n^c := \sup \{a_k + b_k : k \geq n\}$$

Osserviamo che

$$S_n^c \leq S_n^a + S_n^b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(perché $a_k \leq S_n^a$ e $b_k \leq S_n^b$ per ogni $k \geq n$, ma allora $a_k + b_k \leq S_n^a + S_n^b \quad \forall k \geq n$, quindi $S_n^a + S_n^b$ è un maggiorante, quindi $\geq S_n^c$)

Ora si passa al limite per $n \rightarrow +\infty$, sapendo già che esistono

$$S_n^a \rightarrow \limsup a_n$$

$$S_n^b \rightarrow \limsup b_n$$

$$S_n^c \rightarrow \limsup (a_n + b_n)$$

— o — o —

Caso importante Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste, allora per ogni succ. b_n :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

e idem per il $\liminf$.

Oss. Non è un $\Leftrightarrow$, ma una cond. suff.

Dim (con il $\limsup$) $\leq$ segue dal caso generale.

$\geq$ Posto $L_a := \lim a_n$ e $L_b := \limsup b_n$, devo dim. che

$$\limsup (a_n + b_n) \geq L_a + L_b$$

Per farlo, mi basta esibire n_k tale che

$$a_{n_k} + b_{n_k} \rightarrow L_a + L_b$$

Scelgo n_k in modo che $b_{n_k} \rightarrow L_b$ (posso perché $\limsup b_n = \max \lim b_n$)

Automaticamente $a_{n_k} \rightarrow L_a$ ☺.

Esercizio $\limsup (-a_n) = -\liminf a_n$

$$\liminf (-a_n) = -\limsup a_n$$

Achtung! Non provare nemmeno a scrivere un enunciato per $\liminf / \limsup$ di $a_n b_n$.

(Fattibile quasi se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$)