

Teorema (Confronto a due) Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivo.}$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n$$

e

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n$$

Dim Tutti i casi banali con $-\infty$ a sx e $+\infty$ a dx
ci si riduce al caso in cui a_n e b_n sono limitate dall'alto e
dal basso. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{array}{ccc} S_n^a & \leq & S_n^b \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sup \{a_k : k \geq n\} & & \sup \{b_k : k \geq n\} \end{array}$$

e analogamente $I_n^a \leq I_n^b$. Basta ora passare al limite
e usare il confronto classico.

Alternativa : usare che $\limsup = \inf$ dei maggioranti definitivi
e osservare che tutti i magg. definit. della succ. b_n
vanno bene anche per la succ. a_n .
Idem per il $\liminf$.

Teorema (Confronto a 3 aka Carabinieri) Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivo.}$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq \limsup c_n$$

$\uparrow$ confronto $a_n \leq b_n$ $\uparrow$ ovvia $\uparrow$ confronto $b_n \leq c_n$

Corollario Se a_n e a_{n_k} hanno lo stesso limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora sono tutti $=$, ed in particolare $b_n \rightarrow l$.

[Andare a vedere a suo tempo quando si usava solo metà della def. di lim. per a_n e a_{n_k}]

Teorema (della sottosucc.) Sia a_n una succ. e a_{n_k} una sua sottosuccessione.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Se a_n ha limite, allora coincidono i laterali, e quindi...

Dim. La centrale è banale. Le due laterali sono simmetriche. Facciamo quella a dx.

Se a_n NON è limitata sup, allora è gratis!

Altrimenti basta osservare che ogni maggiorante definitivo per a_n è anche un maggiorante definitivo per la sottosucc., quindi $\limsup a_{n_k} = \inf$ di più roba
— o — o —

In particolare, se una sottosucc. ha limite, questo è compreso tra $\liminf$ e $\limsup$ della successione

Terzo approccio: via MAXLIM e MINLIM

Si pone $\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ massimo limite possibile per una s.succ. di a_n

$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ minimo limite possibile per una s.succ. di a_n

(max e min nel senso di $\bar{\mathbb{R}}$ e siamo sicuri che esistono)

Teorema

$$\text{Maxlim } a_n = \text{limsup } a_n$$

$$\text{Minlim } a_n = \text{liminf } a_n$$

Dim

È ovvio che $\text{Maxlim } a_n \leq \text{limsup } a_n$

(se $a_{n_k} \rightarrow l$, allora $l \leq \text{limsup } a_n$ per il teo. delle sottosucc.)

e simmetrico per il liminf.

Quello che non è ovvio è che ogni successione ha una s.succ. che tende proprio al limsup.

Ci sono 3 casi.

① $\text{limsup } a_n = -\infty$. In questo caso già $a_n \rightarrow -\infty$:)

② $\text{limsup } a_n = +\infty$. Per caratterizzazione

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M \text{ frequentemente}$$

La uso con $M=1$: trovo $a_{n_1} \geq 1$

La uso con $M=2$: trovo $a_{n_2} \geq 2$ con $n_2 > n_1$

(ne ho infiniti che vanno bene)

La uso con $M=3$: trovo $a_{n_3} \geq 3$ con $n_3 > n_2$

e così via.

Più formalmente ... definisco a_{n_1} come sopra.

Suppongo di aver definito $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$

e definisco $a_{n_{k+1}}$ tale che

$$a_{n_{k+1}} \geq \underline{k+1}$$

↑
basta che
vada a $+\infty$

$$n_{k+1} > n_k$$

↑
ne ho infiniti
a disposizione

③ $\text{limsup } a_n = L \in \mathbb{R}$. Voglio trovare una s.succ. $a_{n_k} \rightarrow L$

Per caratterizzazione $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \leq L + \varepsilon$ defn.

$a_n \geq L - \varepsilon$ freq.



La uso con $\varepsilon = 1$ e trovo $L-1 \leq a_{m_1} \leq L+1$

" " $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e trovo $L - \frac{1}{2} \leq a_{m_2} \leq L + \frac{1}{2}$

con $m_2 > m_1$ (posso perché gli indici "bravi" sono infiniti)

Più in generale, dopo aver scelto $a_{m_1}, \dots, a_{m_k}$ scelgo m_{k+1} tale che

$$L - \frac{1}{k+1} \leq a_{m_{k+1}} \leq L + \frac{1}{k+1} \quad \text{e} \quad m_{k+1} > m_k$$

La s.succ. tende ad L per i Carabiniere.
— o — o —

Variaute Se $\limsup a_n = +\infty$, posso trovare s.succ. strett. crescente che tende a $+\infty$?

Sì! Costruzione evolutiva.

Prendo a_{m_0} a caso

Supposto di aver definito $a_{m_0}, \dots, a_{m_k}$ prendo m_{k+1} b.c.

$$m_{k+1} > m_k \quad \text{e} \quad a_{m_{k+1}} \geq \underbrace{a_{m_k} + 1}_M$$

Da qui per induzione $a_{m_k} \geq a_{m_0} + k$

Domanda Se $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$

→ esiste s.succ. debolm. cresc. $a_{m_k} \rightarrow L$

(forget it! $a_n = \frac{1}{n}$)

→ esiste s.succ. debolm. monotona $a_{m_k} \rightarrow L$?

— o — o —