

LIMINF E LIMSUP

Tre possibili presentazioni equivalenti

→ via liminf / limsup

→ maggioranti / minoranti

→ via maxlim / minlim

Prima presentazioneSia $\{a_n\}$ una successione.Se $\sup\{a_n\} = +\infty$, allora per def. si pone $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ Se $\sup\{a_n\} < +\infty$, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ definisco

$$S_m := \sup\{a_k : k \geq m\} \in \mathbb{R}$$

Osservo che $S_{m+1} \leq S_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ (sup di meno roba)Quindi per il teo. succ. monotone S_m ha limite in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Pongo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

limite dei sup

Analogamente per il liminf. Se $\inf\{a_n\} = -\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Altrimenti pongo

$$I_m := \inf\{a_k : k \geq m\} \in \mathbb{R}$$

e infine

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} I_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

↑
succ. debolm.
crescente

Soliti esempi

1

$$a_n = (-1)^n$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $S_n = 1$ e $I_n = -1$

Quindi $S_n \rightarrow 1 = \limsup$ e $I_n \rightarrow -1 = \liminf$

2 $a_n = \frac{1}{n}$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $S_n = \frac{1}{n}$ e $I_n = 0$

Quindi $S_n \rightarrow 0 = \limsup$ e $I_n \rightarrow 0 = \liminf$

3 $a_n = 3^{(-1)^n n}$

$$1, \frac{1}{3}, 3^2, \frac{1}{3^3}, 3^4, \frac{1}{3^5}, \dots$$

Ora a_n NON è limitata superiormente, quindi $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Dal basso è limitata e $I_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

Oss. fondamentale $\liminf$ e $\limsup$ esistono per forza e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (\text{con disug. in } \bar{\mathbb{R}})$$

Dim Tutti i casi banali in cui a_n non è limitata dall'alto o dal basso (in cui abbiamo $+\infty$ a dx o $-\infty$ a sx), si avrà sempre che

$$I_n \leq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{inf e sup della stessa cosa})$$

Passando al limite (e posso farlo) ho la tesi.

— 0 — 0 —

CARATTERIZZAZIONE DI LIMSUP

① $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M \text{ frequentemente}$

② $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ si ha che}$
 $a_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente}$
 $a_n \geq L - \varepsilon \text{ frequentemente}$

③ $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ definitivamente}$
 $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

Dim. ① $\Rightarrow$ Per assurdo $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \geq M$ solo un numero finito di volte.

Ma allora definitivamente $a_n \leq M$, ma allora a_n è limitata dall'alto

$\Leftarrow$ Dall'ipotesi segue che $\sup a_n = +\infty$, quindi $\limsup = +\infty$ per def.

② Per ipotesi sappiamo che $S_n \rightarrow L$, cioè
 $L - \varepsilon \leq S_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente}$

Diciamo che sia vera $\forall n \geq n_0$. Allora

$$S_n \leq L + \varepsilon \Rightarrow a_n \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

D'altra parte, se fosse che $a_n \geq L - \varepsilon$ solo un numero finito di volte, allora $S_n \leq L - \varepsilon$ da un certo p.to in poi, quindi $\lim S_n \leq L - \varepsilon$

③ Se $S_n \rightarrow -\infty$, allora definitiv. $S_n \leq M \dots$ e quindi $a_n \leq M$ da quel p.to in poi

Versione Liminf

$$\textcircled{1} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ frequentemente}$$

$$\textcircled{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$$
$$a_n \geq l - \varepsilon \text{ definitivamente.}$$
$$a_n \leq l + \varepsilon \text{ frequent.}$$

$$\textcircled{3} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M \text{ definitivamente.}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

SECONDA PRESENTAZIONE

→ Se a_n non ammette maggioranti, allora $\limsup a_n = +\infty$

→ Se a_n ammette maggioranti, allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{ M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \text{ definitivamente} \}$$

Analogamente

→ Se a_n non ammette minoranti, allora $\liminf a_n = -\infty$

→ Se li ammette, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{ M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \text{ definitivamente} \}$$

Idea della lim: nel caso $\limsup$

$a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente $(\leadsto L + \varepsilon$ è maggiorante definitivamente.)

$a_n \geq L - \varepsilon$ freq. $(\leadsto L - \varepsilon$ non è maggiorante definitivamente.)

Teo 1 Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = m$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m$$

Dim. Se $m = +\infty$ oppure $m = -\infty$, allora basta una delle due per concludere il limite

Se $m \in \mathbb{R}$, allora guardo la parte "giusta" nella caratterizzazione

$$a_n \leq l + \varepsilon \text{ defiu. (grazie al limsup)}$$

$$a_n \geq l - \varepsilon \text{ defiu. (grazie al liminf)}$$

Quindi basta prendere un defiu. comune.

Oss. Vale anche il viceversa, cioè se $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per forza l è anche liminf e limsup.

Dim. Basta guardare la caratterizzazione nei vari casi.

— o — o —