

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$ $x_1 = \alpha > 0$

Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $\boxed{x_{n+1}} = \frac{x_n^2}{n} \rightarrow \frac{l^2}{+\infty} = 0$

$\downarrow$
 l

$l=0$ è l'unico limite $\in \mathbb{R}$ compatibile. C'è anche $l = +\infty$

$A = \{ \alpha : x_n \rightarrow 0 \}$

$B = \{ \alpha : x_n \rightarrow +\infty \}$

Fatto 1 $A \neq \emptyset$

$1 \in A$

(i) $x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

(ii) carabiniere

$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \ddot{\smile}$

FATTO 2 $B \neq \emptyset$ $2026 \in B$

Shett. cresc.? $x_{n+1} \stackrel{?}{\geq} x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^2}{n} \stackrel{?}{\geq} x_n \Leftrightarrow x_n \stackrel{?}{\geq} n$

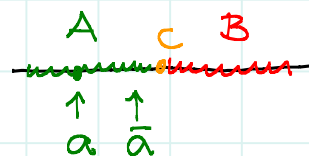
$\uparrow$
so solo $x_n \geq 2026$

Se metto $x_n \geq n$ al p.to 1, questa per induzione NON la dimostro

Dimostro che $x_n \geq 2n \quad \forall n \geq 1$

... P.I. ... $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{4n^2}{n} = 4n \geq 2(n+1) \quad \ddot{\smile}$

FATTO 3 Se $a \in A$, anche quelli + piccoli $\in A$
Se $b \in B$, " grandi $\in B$



FATTO 4 A è aperto. Se $x_n(a) \rightarrow 0$, allora

$\exists n_0 \geq 1$ t.c. $x_{n_0+1}(a) < x_{n_0}(a)$

Per $n \geq n_0$ è per forza decrescente

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{n+1} \leq \frac{x_n^2}{n+1} \leq \frac{x_n^2}{n} = x_{n+1}$$

Se $x_{n+1}(a) < x_n(a)$, allora lo stesso vale per gli a "vicini" e quindi anche per un certo $\bar{a} > a$.

Quindi $c \notin A$.

FATTO 5 $c \in B$

La succ. non può avere colpi di decrescenza, quindi è deb. cresc., quindi ha limite, ma di $l \in \mathbb{R}$ non ce ne sono a disposizione, quindi $l = +\infty$.

Esercizio hard Determinare ordine di ∞ della succ. che parte da c .

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n!}$

Esistono x_1 per cui $x_n \rightarrow +\infty$?

$x_n \geq (n!)^2$ si può dim. per induzione? Forse bastava $x_n \geq 4n \cdot (n!)$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n!} \geq \frac{(n!)^4}{n!} = (n!)^3 \stackrel{?}{\geq} [(n+1)!]^2$$

Questa per n abb. grande è vera e quindi basta fare a mano i primi termini.

Morale: funziona anche con $x_{n+1} = \frac{x_n^{1+\text{poco}}}{n!}$

Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1
 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) = \alpha$ e $|f'(\alpha)| < 1$
 Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

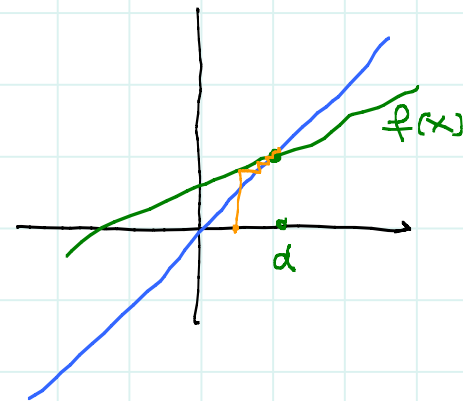
La successione

$$x_{m+1} = f(x_m)$$

tende ad α per ogni

$$x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

(se parto abbastanza vicino ad α ,
 allora tendo ad α)



Dim Poiché $|f'(\alpha)| < 1$, allora esistono $m < 1$ ed $\varepsilon > 0$ t.c.

$$|f'(x)| \leq m \quad \forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

Da qui in poi basta usare il piano con la distanza.

Se $x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, allora

$$(i) \quad x_m \in \dots \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

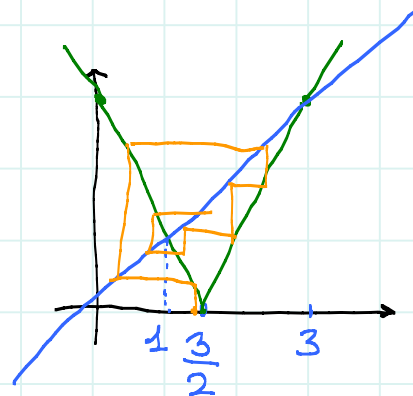
$$(ii) \quad |x_{m+1} - \alpha| \leq m |x_m - \alpha| \quad \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow f \text{ è } m\text{-Lip. in } [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

$$(iii) \quad |x_m - \alpha| \leq m^m |x_0 - \alpha| \quad \leftarrow$$

$$(iv) \quad x_m \rightarrow \alpha$$

Esempio $x_{m+1} = |2x_m - 3| \quad x_0 = \sqrt{2}$

Idea: x_m non ha limite!



FATTO 1 $0 \leq x_m \leq 3 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Basta osservare che $f([0, 3]) = [0, 3]$, cioè

$$0 \leq f(x) \leq 3 \quad \forall x \in [0, 3]$$

FATTO 2 Se $x_m \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell \in \{1, 3\}$

FATTO 3 Se $x_m \in [0, \frac{3}{2}]$, allora $|x_{m+1} - 1| \geq |x_m - 1|$

Infatti $|x_{n+1}-1| = |3-2x_n-1| = 2|x_n-1|$
 $\uparrow$
 so chi è 1
 in $x \in [0, \frac{3}{2}]$

FATTO 4 Se $x_n \in [\frac{3}{2}, 3]$, allora $|x_{n+1}-3| \geq |x_n-3|$

Infatti $|x_{n+1}-3| = |2x_n-3-3| = 2|x_n-3| \quad \therefore$

FATTO 5 Può $x_n \rightarrow 1$?

no! Definitivamente sarebbe $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$, ma allora
 defiu. $|x_{n+1}-1| \geq \uparrow |x_n-1|$
 posso anche mettere 2

Per lo stesso motivo non può $x_n \rightarrow 3$?

FATTO 6 Devo solo escludere che $x_n = 1$ oppure $x_n = 3$
 definitivamente

Non si può perché per induzione $x_n = a_n\sqrt{2} + b_n$
 con a_n e b_n interi e $a_n \neq 0$.

— 0 — 0 —