

**L'ESEMPIO**

(Valori soglia)

# capra &amp; pauca

$$x_{m+1} = x_m^2 + \frac{1}{10m}$$

$$x_1 = \alpha > 0$$

Esplorazione: se  $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora

$$x_{m+1} = x_m^2 + \frac{1}{10m}$$

↓

↓

↓

$$l = l^2 + 0$$

$$l = l^2$$

$$l = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

Anche  $l = +\infty$  sembra un limite possibileOss 1 Se  $\alpha = 2026$ , allora  $x_m \rightarrow +\infty$ Piano: (i)  $x_m \geq 2026 \quad \forall m \geq 1$ (ii)  $x_{m+1} \geq x_m \quad \forall m \geq 1$ (iii)  $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (iv)  $l = +\infty$ } *esecuzione standard*Oss 2 Se  $\alpha = \frac{1}{2}$ , allora  $x_m \rightarrow 0$ Piano: (i)  $0 \leq x_m \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (ii)  $x_{m+1} \leq x_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (iii)  $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (iv)  $l = 0$ Dim (i) + (ii) Dim. per induzione che  $0 \leq x_{m+1} \leq x_m \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \geq 1$ 

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

quindi  $0 \leq x_2 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$  P.B.  $\therefore$ P.I. Per ipotesi  $0 \leq x_{m+1} \leq x_m \leq \frac{1}{2}$ . Faccio i  $\square$ 

$$0 \leq x_{m+1}^2 \leq x_m^2 \leq \frac{1}{4}$$

Ma allora, aggiungendo  $\frac{1}{10(m+1)}$  ottengo

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{10(m+1)} + x_{m+1}^2}_{x_{m+2}} \leq \frac{1}{10(m+1)} + x_m^2 \leq \underbrace{\frac{1}{10m} + x_m^2}_{x_{m+1}} \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Alla fine  $0 \leq x_{m+2} \leq x_{m+1} \leq \frac{1}{2}$   $\square$

**Congettura** Esiste  $\alpha_0 > 0$  tale che

→ per  $\alpha > \alpha_0$  si ha che  $x_n \rightarrow +\infty$

→ per  $\alpha \in [0, \alpha_0)$  si ha che  $x_n \rightarrow 0$

→ per  $\alpha = \alpha_0$  si ha che  $x_n \rightarrow 1$

Notazione: chiamiamo  $x_n(\alpha)$  il termine  $x_n$  partendo con  $x_1 = \alpha$

$$x_2(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{10} \quad x_3(\alpha) = [x_2(\alpha)]^2 + \frac{1}{20} = \left(\alpha^2 + \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{20}$$

e così via.

**FATTO 1** Per ogni  $n \geq 1$ , la funzione  $\alpha \rightarrow x_n(\alpha)$  è continua (è un polinomio in  $\alpha$ ) e crescente per  $\alpha \geq 0$ .

Poniamo  $A = \{\alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty\}$

$B = \{\alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty\}$

Cosa sappiamo già?

$$\frac{1}{2} \in A$$

$$2026 \in B$$



**FATTO 2** Se  $\alpha \in B$ , allora ogni  $\beta \geq \alpha$  vale ancora  $\beta \in B$

Se  $\alpha \in A$ , allora tutti quelli sotto  $\alpha$  sono in A

Quindi A sta a sx di B, cioè  $a < b$  per ogni  $a \in A, b \in B$

Quindi c'è un fizio in mezzo almeno, ed è candidato ad essere la soglia.

**FATTO 3** La zona  $B$  è aperta, cioè per ogni  $b \in B$  esiste  $\bar{b} \in B$  tale che  $\bar{b} < b$ .  
Questo impedisce che  $\inf B \in B$ .

Se  $x_n(b) \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora esiste  $n_0 \geq 1$  t.c.  
 $x_{n_0}(b) > 1$ . Ma  $x_{n_0}$ , come funzione di  $b$ , è continua.  
Quindi esiste  $\bar{b} < b$  tale che  $x_{n_0}(\bar{b}) > 1$ .  
Ma allora  $x_n(\bar{b}) \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , perché da lì in poi è crescente e  $> 1$ .

**FATTO 4** La zona  $A$  non contiene il suo sup, cioè  
 $\forall a \in A \exists \bar{a} \in A$  t.c.  $\bar{a} > a$ .

Se  $x_n(a) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora esiste  $n_0 \geq 1$  t.c.

$$x_{n_0+1}(a) < x_{n_0}(a) < 1$$

$\uparrow$  vera frequentemente, altrimenti  
 $\uparrow$  vera definitivamente, altrimenti  
 sarebbe deb. cresc. e non  
 potrebbe  $\rightarrow 0$ .

Ma allora per continuità la stessa cosa è vera per un certo  $\bar{a} > a$ . Da quel p.to in poi  $x_n(\bar{a})$  risulta  $\leq 1$  e decrescente

Idea fond. se  $x_{n+1} \leq x_n \leq 1$ , allora da quel valore di  $n$  in poi la succ. è decrescente

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 + \frac{1}{10(n+1)} \leq x_n^2 + \frac{1}{10n} = x_{n+1}$$

Fatto 5 Sia  $c$  in mezzo tra  $A$  e  $B$ . Dico che  $x_n(c) \rightarrow 1$

Sappiamo che  $x_n(c) \leq 1$  per ogni  $n \geq 1$  (se  $x_{n_0}(c) > 1$ , allora  $c \in B$ )

Sappiamo che  $x_{n+1}(c) \geq x_n(c)$  per ogni  $n \geq 1$   
(se  $x_{n+1}(c) < x_n(c)$ , allora per forza  $c \in A$ )

Ma allora  $x_n(c)$  è sempre  $\leq 1$  e crescente, quindi  
ha limite  $l \in \mathbb{R}$  e per forza  $l = 1$ .

**FATTO 6** Unicità di  $c$

Supponiamo che  $y_n$  e  $z_n$  siano due succ. che tendono a 1

$$y_{n+1} = y_n^2 + \frac{1}{10n}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + \frac{1}{10n}$$

Supponiamo che  $y_1 > z_1$

Allora intanto  $y_n > z_n$  per ogni  $n \geq 1$  (induzione)

Poniamo  $d_n := y_n - z_n$  (sappiamo che  $d_n > 0$  e  $d_n \rightarrow 0$ )

Cosa risolve?

$$d_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = y_n^2 + \frac{1}{10n} - z_n^2 - \frac{1}{10n}$$

$$= (y_n + z_n)(y_n - z_n)$$

$$= \underbrace{(y_n + z_n)}_{\downarrow 2} d_n$$

Quindi  $d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n$  definitivamente, quindi  $d_n \rightarrow +\infty$   
il che è assurdo

Schema generale: zona A a sx di una zona B

A e B sono aperte

unicità del fizio in mezzo

— o — o —