

Esempio 0 $x_{n+1} = \frac{n^{2026}}{2^n} x_n$ $x_1 = 2026$

$x_n \rightarrow 0$ PIANO (i) $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$
(ii) $x_n \rightarrow 0$ (RAPPORTO)

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{n^{2026}}{2^n} x_n + 25$ $x_1 = 2026$

Idea: $x_n \rightarrow 25$, ma il criterio del rapporto non lo posso fare 😞
Mi serve un bound dall'alto, ma uno effettivo non si trova.

Idea: sia $m_0 \geq 1$ tale che $\frac{n^{2026}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq m_0$
↑ posso mettere $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{312}$,
ma meglio NON 1

PIANO (i) $25 \leq x_n \leq x_{m_0} \quad \forall n \geq m_0$
(ii) $x_n \rightarrow 25$

Dimo (ii) : Carabinierei!

$$25 \leq x_{n+1} \leq \frac{n^{2026}}{2^n} x_{m_0} + 25 \quad \forall n \geq m_0$$

↓
0

Dimo (i) $x_n \geq 25 \dots$ ovvio...

$x_n \leq x_{m_0}$ per induzione

P.B. $m = m_0$ ☺

P.I. Ipotesi: $x_n \leq x_{m_0}$. Allora

$$x_{n+1} = \frac{n^{2026}}{2^n} x_n + 25 \leq \frac{x_{m_0}}{2} + 25 \leq x_{m_0}$$

$\frac{n^{2026}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ ↑ uso ipotesi e def. di m_0 ↑ spero

Controllo la speranza: $\frac{x_{m_0}}{2} + 25 \leq x_{m_0} \Leftrightarrow x_{m_0} \geq 50$

Ma sarà vero? Meglio essere + cauti e fare

$$(i) x_n \leq x_{m_0} + 5000 \quad \forall n \geq m_0$$

$$\text{Così } x_{m+1} \leq \frac{x_{m_0} + 5000}{2} + 25 \stackrel{?}{\leq} x_{m_0} + 5000$$

$$x_{m_0} + 5000 + 50 \leq 2x_{m_0} + 10.000 \quad \text{BOIA!}$$

Esempio 3 $x_{m+1} = \sqrt[n]{2026 + x_m} \quad x_1 = 2026$

Idea: $x_n \rightarrow 1$ perché vince $\sqrt[n]{}$.

PIANO (i) $1 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $x_n \rightarrow 1 \quad \dots \quad 1 \leq x_{m+1} \leq \sqrt[n]{2026 + 8000}$
no carabinieri

Dici (i) Induzione ... P.I. ...

$$x_{m+1} = \sqrt[n]{2026 + x_m} \leq \sqrt[n]{2026 + 8000} \leq 8000$$

$\uparrow$
valut. di $\sqrt[n]{}$ e ipot. ind. $\uparrow$
spero

Controllo la speranza; per $n=1$ NO $\ddot{\smile}$
per $n \geq 2$...

$$\sqrt[n]{\dots} \leq \sqrt{10.026} \leq 8000 \quad \ddot{\smile}$$

Quindi basta anche $x_2 \leq 8000$ a mano e poi parte induzione

Esempio 4 $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + n}$ $x_1 = 2026$

Potei fare il piano con $x_n \leq 8000 \dots$

Nel passo induttivo trovo

$$\dots \sqrt[n]{n+8000} \leq 8000$$

che è vero da un mo misterioso in poi.

Però devo controllare il passo per quell'uo misterioso.

SLOGAN: riconvenza e definitivamente non vanno facilmente d'accordo

PIANO (i) $1 \leq x_n \leq 8000 + 8000n \quad \forall n \geq 1$
 (ii) carabinieri

Passo induttivo del p.to (i)

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + n} \leq \sqrt[n]{8000 + 8001n} \leq 8000 + 8000(n+1)$$

Per $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{\dots} \leq \sqrt{\dots} \leq 8000n + 16000$$

↑

$$\Leftrightarrow 8000 + 8001n \leq (8000n + 16.000)^2$$

Esempio 5 $x_{n+1} = \frac{nx_n + 7}{2n+13}$ $x_0 = 2026$

Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = \frac{nl + 7}{2n+13} = \frac{l}{2} \rightsquigarrow l = 0$

↑
 PORCATA:
 limite metà per volta

PIANO (i) $0 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Questo non basta per usare i carabinieri al p.to successivo.

$$x_{n+1} = \frac{n x_n}{2n+3} + \frac{7}{2n+3} \leq \frac{n x_n}{2n} + \frac{7}{2n+3} = \frac{x_n}{2} + \frac{7}{2n+3}$$

Tentativo : (i) $0 \leq x_n \leq \frac{8000}{n} \quad \forall n \geq 1$

Induzione ... P.I. $x_{n+1} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{7}{2n+3} \leq \frac{4000}{n} + \frac{7}{2n+3} \stackrel{p.i.}{\leq} \frac{8000}{n+1}$

Facendo il conto è abbondantissima

$$\frac{4000}{n} + \frac{7}{2n+3} \leq \frac{4000}{n} + \frac{8}{2n} \leq \frac{8000}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4004}{n} \leq \frac{8000}{n+1}$$

Qual è la parte principale ?

Congettura : $x_n \sim \frac{c}{n}$ $x_{n+1} \sim \frac{n x_n + 7}{2n+3} \sim \frac{c+7}{2n+3} \sim \frac{c+7}{2n}$

$\frac{c}{n} \sim \frac{c+7}{2n}$

$\leadsto c = \frac{c+7}{2} \leadsto c = 7$ congettura $x_n \sim \frac{7}{n}$

— 0 — 0 —