

SUCC. PER RICORRENZA NON AUTONOME

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

L'unica regola è che non ci sono regole!

Esempio 1 $x_{n+1} = n x_n$ $x_1 = 3$

$\uparrow$
(se mettessi $x_0 = 3$ sarebbe $x_n = 0 \forall n \geq 1$)

È abbastanza chiaro che $x_n \rightarrow +\infty$.

PIANO 1 (Monotonia)

(i) $x_n \geq 3 \quad \forall n \geq 1$ (facile indus.)

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (teo. succ. monot.)

(iv) $l = +\infty$

Dim (iv)

$$x_{n+1} = n x_n$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad l$

Va sistemato... se fosse $l \in \mathbb{R}$ allora sarebbe $l \geq 3$ e quindi $x_{n+1} \rightarrow +\infty$ quindi $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii)

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow n x_n \geq x_n \Leftrightarrow (n-1) x_n \geq 0 \quad \text{Ok } \because$$

$\uparrow$
uso ric.

Alternativa: lo dim. per induzione $x_2 \geq x_1$ a mano

P.I. Ipotesi: $x_{n+1} \geq x_n$. Allora

$$x_{n+2} = (n+1) x_{n+1} \geq (n+1) x_n \geq n x_n = x_{n+1}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
ric. ipotesi ind. $n+1 \geq n$ e $x_n \geq 0$ ric.

PIANO 2 (Stima + confronto)

(i) $x_n \geq 3 \quad \forall n \geq 1$ come prima

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) $x_{n+1} = n x_n \geq \boxed{3n}$
 $\downarrow$
 $+\infty$

Per confronto $x_{n+1} \rightarrow +\infty$
quindi anche $x_n \rightarrow +\infty$

PIANO 3 (Criterio del rapporto)

(i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Uso criterio del rapporto (qui serve (i))

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n x_n}{x_n} = n \rightarrow +\infty > 1, \text{ quindi } x_n \rightarrow +\infty$$

Esempio 2 $x_{n+1} = x_n \cdot \arctan n$

$$x_1 = \frac{1}{2026}$$

PIANO 3 (i) $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ (induzione)

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Criterio rapporto: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2} > 1$
quindi $x_n \rightarrow +\infty$

Oss. La succ. non è monotona poiché $x_2 = \frac{1}{2026} \cdot \frac{\pi}{4} < x_1$

però diventa monotona non appena $\arctan n \geq 1$

PIANO 1 Sia $n_0 \geq 1$ tale che $\arctan n \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$

(i) $x_n \geq x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq n_0$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $l = +\infty$

] si possono compattare
in un solo

PIANO 2

(i) $x_n \geq x_{n_0} > 0 \quad \forall n \geq n_0$

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) $x_{n+1} = x_n \arctan n \geq x_{n_0} \cdot \arctan n$
 e di qui non si va da nessuna parte,
 quindi **NON FUNZIONA**

Esempio 3 $x_{n+1} = \frac{x_n + 7}{n+5} \quad x_0 = 2026$

Esplorazione: sarà monotona?

$$x_{n+1} \stackrel{?}{\leq} x_n \Leftrightarrow \frac{x_n + 7}{n+5} \stackrel{?}{\leq} x_n \Leftrightarrow x_n + 7 \stackrel{?}{\leq} n x_n + 5 x_n$$

$$\Leftrightarrow x_n (n+4) \stackrel{?}{\geq} 7 \Leftrightarrow x_n \geq \frac{7}{n+4}$$

Quindi servirebbe un p.to (i) che dice $x_n \geq \frac{7}{n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 che volendo si può dim. per induzione. [viene facile: provato dopo video]

Se sapessi già che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 7}{n+5} \rightarrow \frac{l+7}{+\infty} = 0$$

PIANO (Limitatezza + Carabinieri) (i) $0 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim (i) $x_n \geq 0$ è banale induzione

$x_n \leq 8000$ P.B. $n=0 \quad \checkmark$

P.I. Ipotesi: $x_n \leq 8000$. Allora

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 7}{n+5} \leq \frac{8007}{5} \leq 8000$$

$\uparrow$ num. + grande, denum. + piccolo

Dim (ii) Grazie a (i) sappiamo che

$$\boxed{\frac{7}{n+5}} \leq x_{n+1} \leq \boxed{\frac{8007}{n+5}} \quad \text{e quindi pure } x_n \rightarrow 0$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

Domanda: per quali α converge $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\alpha$?

O ancora meglio: determinare la parte principale di x_n .

Risposta: $x_n \sim \frac{7}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, cioè $n x_n \rightarrow 7$

È equivalente a fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{n+1}{n+5}} (x_{n+7}) = 7 \quad \text{!}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad 0$

Oss. Se il dato iniziale fosse stato $x_0 = \frac{1}{203}$, conveniva comunque un p.to (i) abbastanza tipo

$$0 \leq x_n \leq 8000$$

Esempio 4 $x_{n+1} = \frac{x_n}{n+5} + \sqrt{n} \quad x_0 = 1$

$$x_1 = \frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{\frac{1}{5}}{6} + 1 = \frac{1}{30} + 1$$

PIANO (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0$ (induzione)
(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Da (i) segue che $x_{n+1} \geq \sqrt{n}$. Fine per confronto

Esempio 5

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 7n}{n+5}$$

$$x_0 = 2026$$

PIANO

(i) $0 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow 7$ (Carabinieri)

... P.I. $x_n \leq 8000 \leadsto x_{n+1} = \frac{x_n + 7n}{n+5} \leq \frac{8000 + 7n}{n+5} \stackrel{?}{\leq} 8000$

Controllo: $8000 + 7n \leq 8000n + 40.000$ BOIA!

— 0 — 0 —