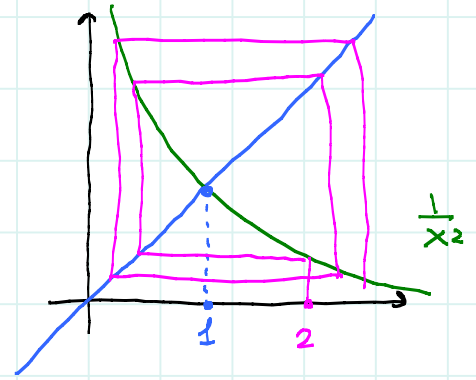


Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}$ $x_0 = 2$

Idea: lo spiraleggiamento ora è uscente, quindi

$$x_{2m} \rightarrow +\infty \quad x_{2m+1} \rightarrow 0$$

quindi x_n non ha limite



Facciamo finta di non vedere che c'è una formula esplicita...

(i) $x_{2m+2} \geq x_{2m} \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(ii) $0 \leq x_{2m+3} \leq x_{2m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$x_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

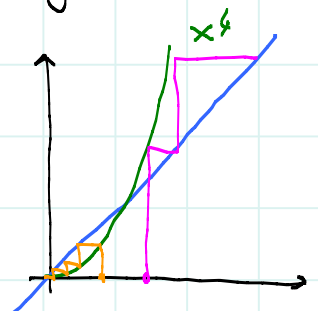
(iv) $l = +\infty$ e $m = 0$

La via più veloce è la **DOPPIA ITERAZIONE**

Pongo $y_n = x_{2n}$, cioè la s.succ. dei pari

$$y_{n+1} = x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})) = f(f(y_n)) = y_n^4$$

Quindi la succ. dei pari soddisfa $y_{n+1} = y_n^4$ con $y_0 = 2$ e questa tende a $+\infty$ grazie al piano con la monotonia.



Analogamente $z_n := x_{2n+1}$ soddisfa

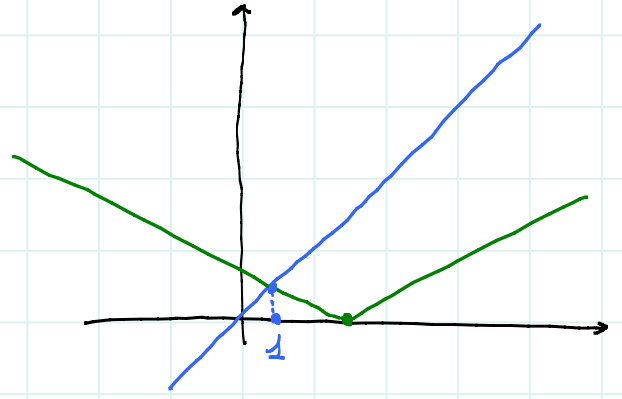
$$z_{n+1} = z_n^4 \quad \text{con} \quad z_0 = x_1 = \frac{1}{4}$$

e questa va a 0 per il piano con la monotonia.

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{|x_n - 3|}{2}$ $x_0 = 2026$

Punto fondamentale:

$f(x) = \frac{1}{2} |x-3|$ è Lipschitziana
con costante $\frac{1}{2}$



$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2} ||b-3| - |a-3|| \leq \frac{1}{2} |b-a|$$

$\uparrow$
 $||A|-|B|| \leq |A-B|$

Piano con la distanza

$$d_n := |x_n - 1|$$

(i) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

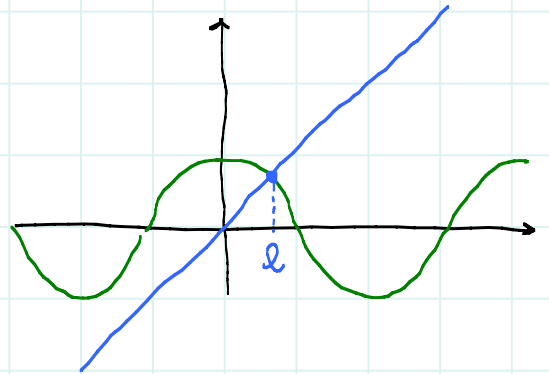
(iii) $d_n \rightarrow 0$ cioè $l=1$

Dim (i): $d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{1}{2} |x_n - 1| = \frac{1}{2} d_n$
 $\uparrow$
Lip!!

Esempio 2 $x_{n+1} = \cos x_n$ $x_0 = 2026$

[Prendo calcolatrice, scrivo 2026, e poi schiaccio ripetutamente cos]
Dopo un po' si stabilizza. Perché?

L'idea è che $x_n \rightarrow l$, dove
 l è l'unica soluzione di
 $l = \cos l$



Perché la sol. esiste ed è unica?

Studio $x - \cos x$ e dim. che è iniettiva e surgettiva.

Se provo il piano con la distanza

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |\cos x_n - \cos l| \leq |x_n - l| = 1 \cdot d_n$$

$\uparrow$
NON MI PIACE :)

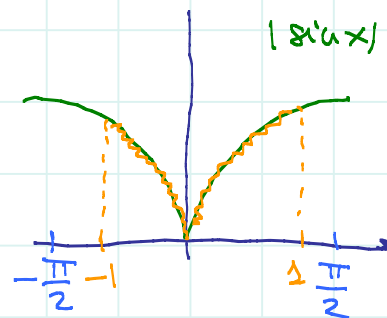
Idea: provare a migliorare la costante di Lip!

(i) $-1 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ ovvia perché $-1 \leq \cos x \leq 1$

(ii) $d_{n+1} \leq \underbrace{(\sin 1)}_{c < 1} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Qual è la costante di Lip di $\cos x$ in $[-1, 1]$?

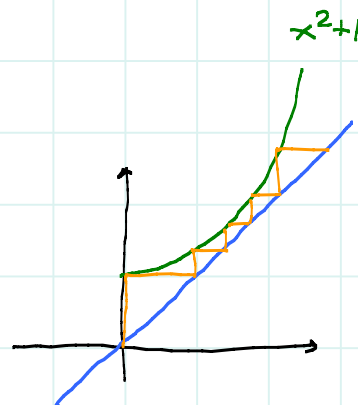
$$L = \max \left\{ \underbrace{|\sin x|}_{|f'(x)|} : x \in [-1, 1] \right\}$$



Esempio 3 $x_{n+1} = x_n^2 + 1 \quad x_0 = 0$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$

Precorso: $x^2 + 1 > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$



Adesso: $x_n \rightarrow +\infty$ Piano: (i) NON SERVE

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $l = +\infty$ (se fosse $l \in \mathbb{R}$, allora $l^2 + 1 = l \dots$)

Quindi $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ quindi ok cond. nec.

Uso criterio del rapporto con $a_n = \frac{1}{x_n}$ [Devo fare prima per esclusione che $x_n > 0$ per ogni $n \geq 1$]

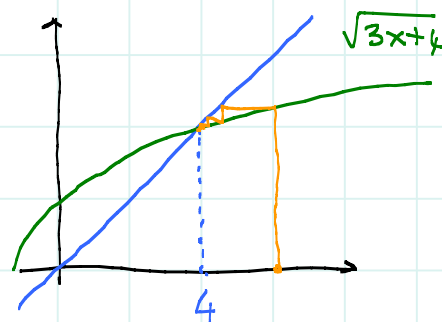
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x_n = \frac{x_n}{x_n^2 + 1} \xrightarrow{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2 + 1}} 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 4 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$ $x_0 = 5$ $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^n (x_n - 4)$

Idea: $x_n \rightarrow 4$ decrescendo

Piano: (i) $4 \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 (iv) $l = 4$



Pongo $a_n = 10^n (x_n - 4)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $+\infty \quad 0$

Criterio rapporto [Seve $x_n > 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ma basta modificare ci)]

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{10^{n+1} (x_{n+1} - 4)}{10^n (x_n - 4)} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3x_n + 4} - 4}{x_n - 4} \cdot \frac{\sqrt{x_n} + 4}{\sqrt{x_n} + 4} \\ &= 10 \cdot \frac{3x_n + 4 - 16}{(x_n - 4)(\sqrt{3x_n + 4} + 4)} \\ &= 10 \cdot \frac{3(x_n - 4)}{(x_n - 4)(\sqrt{x_n} + 4)} \rightarrow \frac{30}{8} > 1 \end{aligned}$$

quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

Oss. $f'(4) = \frac{3}{8}$

$\nearrow$ Derivata nel
p.to intersezione

— 0 — 0 —