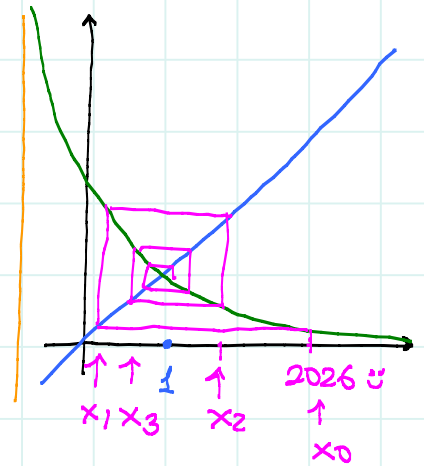


Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{8}{5+3x_n}$ $x_0 = 2026$

Idea: $x_n \rightarrow 1$ spiraleggiando



Due strategie

→ piano con la distanza

→ piano con le due s. succ.

Piano con la distanza

Pongo $d_n := |x_n - l|$ = distanza dal presunto limite l

(i) dove sta x_n

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dove $c < 1$ è una costante

(iii) $d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$ cioè $x_n \rightarrow l$

(iv) segue da (iii) perché $0 \leq d_n \leq c^n d_0$ essenziale che c è fisso e $c < 1$

(iii) induzione a partire da (ii)

Tornando all' esempio

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{3}{5} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $x_n \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad d_{n+1} &= |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{8}{5+3x_n} - 1 \right| = \left| \frac{8-5-3x_n}{5+3x_n} \right| \\
 &= \frac{3|1-x_n|}{5+3x_n} = \frac{3d_n}{5+3x_n} \leq \frac{3}{5} d_n \quad \text{per } x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

Oss 1 La succ. x_n non è monotona, ma d_n lo è (anzi decade di $\frac{3}{5}$ ogni volta)

Oss 2 Poichiamo $f(x) = \frac{8}{5+3x}$. Allora

$$d_{m+1} = |x_{m+1} - 1| = \underset{\substack{\uparrow \\ 1 = f(1)}}{|f(x_m) - f(1)|} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante di lip di } f(x) \\ \text{nella zona in cui stanno} \\ x_m \text{ e } 1}}{L} |x_m - 1| = L d_m$$

Nell'esempio $L = \sup \{ |f'(x)| : x \geq 0 \}$
 $= \sup \left\{ \frac{8 \cdot 3}{(5+3x)^2} : x \geq 0 \right\} = \frac{24}{25} < 1 \quad \circ$
 $\uparrow$ altro possibile valore di c

Primo con le due sottosuccessioni

Idea: x_n non è monotona, ma x_{2m} e x_{2m+1} lo sono!

- (i) $1 \leq x_{2m+2} \leq x_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ sui pari $\searrow$
- (ii) $x_{2m+1} \leq x_{2m+3} \leq 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ su dispari $\nearrow$
- (iii) $x_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad x_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$ (teo. succ. monotone)
- (iv) $l = m = 1$

Dim (iv)

$$x_{2m+1} = \frac{8}{5+3x_{2m}}$$
$$\downarrow$$
$$m = \frac{8}{5+3l}$$

$$x_{2m+2} = \frac{8}{5+3x_{2m+1}}$$
$$\downarrow$$
$$l = \frac{8}{5+3m}$$

Devo risolvere un sistema in m ed l

$$\begin{aligned} 3m + 3ml &= 8 \\ 5l + 3ml &= 8 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Sottraggo } m=l &\leadsto 3l^2 + 5l - 8 = 0 \\ \leadsto l=1 &\text{ oppure } l = -\frac{8}{3} \\ &\quad \text{incompatibile} \end{aligned}$$

Dim (i) e (ii) molto manuale

La illustro nel caso più semplice $x_0 = 2$.

Calcolo i primi termini: $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{8}{11}$, $x_2 = \frac{8}{5 + \frac{24}{11}} = \frac{88}{49}$

Osservo che $1 \leq x_2 \leq x_0$

Applico $f(x)$ e invento i versi: $f(1) \geq f(x_2) \geq f(x_0)$

$$1 \geq x_3 \geq x_1$$

Applico $f(x)$ e invento i versi: $f(1) \leq f(x_3) \leq f(x_1)$

$$1 \leq x_4 \leq x_2$$

Continuando ad applicare f ottengo tutte le relazioni che mi servono.

Superformale Dimostro per induzione che

$$\frac{8}{11} \leq x_{2m+1} \leq x_{2m+3} \leq 1 \leq x_{2m+2} \leq x_{2m} \leq 2026$$

→ calcolo a mano i primi 4 termini x_0, x_1, x_2, x_3
e vedo che funzionano

→ al passaggio induttivo prendo l'ipotesi e applico due volte $f(x)$. La composizione è crescente, quindi salvo i versi e ottengo la tesi induttiva.

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{8}{3+5x_n}$ $x_0 = 2026$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{8}{3+5x_n} - 1 \right| = \frac{|8-3-5x_n|}{3+5x_n} = \frac{5|1-x_n|}{3+5x_n} \leq \frac{5}{3} d_n \quad \text{☹️}$$

Vie d'uscita: → se per caso $1 \leq x_2 \leq x_0$ (vera abbondante)
da qui posso procedere con le due s.succ.

→ costruire un p.to (i) più forte da cui dedurre che $x_n \geq \frac{1}{2}$ perché a quel p.to

$$d_{n+1} = \frac{5d_n}{3 + 5x_n} \leq \frac{5}{5,5} d_n \quad \text{c} \\ \uparrow \\ x_n \geq \frac{1}{2}$$

Ma... $x_n \geq \frac{1}{2}$ non si può dim. per inclusione, oltre al fatto che per x_1 è falso

Bisogna sperare di trovare una disuguaglianza del tipo

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq \alpha \\ \uparrow \\ \text{da trovare}$$

che sia vera definitivamente. A quel p.to uso la distanza

Quando provo a dim. per inclusione mi ritrovo

$$\frac{1}{2} \leq f(\alpha) \leq x_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \alpha$$

$$\text{Serve } \frac{1}{2} \leq f(\alpha) \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \alpha$$

— o — o —