

**Esempio 1**  $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

Ci sarebbe una formula esplicita, ma faccio finta di non saperlo :)

Obiettivo: trovare il limite.

**PIANO**

- (i)  $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii)  $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii)  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv)  $l = 0$

Piano standard  
con la monotonia

**Dim (iii)** Dal (ii) sappiamo che è deb. dec.

Dal (i) sappiamo che è limit. inferiormente

Teo. succ. monotone  $\Rightarrow$  esiste limite reale

**Dim (iv)** Una volta stabilito (iii), posso passare al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = x_n^3$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$l = l^3$$

$$\Rightarrow l = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \rightarrow 1 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

NON sono compatibili  
con p.to (i)

**Dim (i)** Induzione

**$n=0$**  Banale

**$n \Rightarrow n+1$**  Per ipotesi  $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3}$

Elevo tutto al cubo (posso perché è strett. crescente)

$$0 \leq x_n^3 \leq \frac{8}{27} \leq \frac{2}{3}$$

$x_{n+1}$

$\uparrow$   
verifica

$$\leadsto 0 \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{3} \text{ che è la tesi}$$

Dim (ii) Devo dim. che  $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

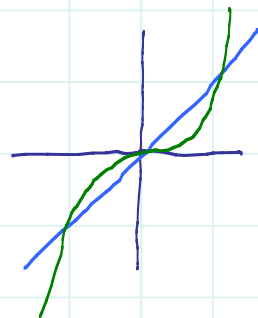
1° modo: ricorrenza + disuguaglianza

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \text{vuol dire} \quad x_n^3 \leq x_n$$

$$\Leftrightarrow x_n \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

↑  
precorso

Ma noi sappiamo che  $x_n \in [0, \frac{2}{3}]$ , quindi ok.



2° modo: induzione + applico  $\neq$  Dim.  $x_{n+1} \leq x_n$  per induzione.

n=0  $x_1 \stackrel{?}{\leq} x_0 \quad x_1 = \frac{8}{27} \leq \frac{2}{3} = x_0 \quad \checkmark$

n  $\Rightarrow$  n+1 Per ipotesi:  $x_{n+1} \leq x_n$

Faccio il cubo (posso perché strett. cresc.)

$$x_{n+1}^3 \leq x_n^3 \quad \text{cioè} \quad x_{n+2} \leq x_{n+1} \quad \checkmark$$

— 0 — 0 —

Oss. Volendo posso mettere (i) e (ii) insieme facendolo

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[Si dimostra con induzione + applico  $\neq$ ]

Esempio 2  $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$

PIANO (i)  $x_n \geq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii)  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv)  $l = +\infty$

Dim (iii)

(ii) + teo. succ. monotone (non posso escludere  $l = +\infty$  perché non ho un bound superiore)

Dim (iv)

SE PER ASSURDO fosse  $l \in \mathbb{R}$ , allora passo al lim nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^3 \end{array} \Rightarrow l = \begin{array}{c} 0 \\ \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{array}$$

Nessuno è compatibile con p.to (i), quindi resta solo  $l = +\infty$ .

Dim (i)

Induzione standard

Dim (ii)

Funzionano entrambe gli approcci

→ ricorrenza + diseq.

→ induzione + applico  $\neq$

Oss. Potrei riassumere (i) e (ii) dicendo

$$\frac{3}{2} \leq x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dimostrarlo per induzione.

Esempio 3

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10}$$

$$x_0 = 2026$$

PIANO

(i)  $x_n \geq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii)  $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii)  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

[ (i) + (ii) + teo. succ. monotone ]

(iv)  $l = 5$

**Dim (iv)** Grazie a 3 passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$
$$l = \sqrt{3l + 10}$$

$$l^2 = 3l + 10 \quad l^2 - 3l - 10 = 0$$

$$(l-5)(l+2) = 0$$

$$l = 5 \quad \text{oppure} \quad \boxed{l = -2}$$

↑ NON ACCETTABILE  
come sol. dell'equazione

Quindi per forza  $l = 5$

**Dim (i)** Inclusione  $x_0 \geq 5$   $2026 \geq 5$   $\ddot{}$

**$n \Rightarrow n+1$**  Ipotesi:  $x_n \geq 5 \Rightarrow 3x_n + 10 \geq 15 + 10 = 25$   
quindi  $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10} \geq \sqrt{25} = 5 \quad \ddot{}$

**Dim (ii)** Funzionano entrambi i metodi

Inclusione + applico  $f$  :  $x_1 \leq x_0$   $\sqrt{3 \cdot 2026 + 10} \leq 2026$   
abbondante ...

**$n \Rightarrow n+1$**  Ipotesi:  $x_{n+1} \leq x_n$   
 $\Rightarrow 3x_{n+1} + 10 \leq 3x_n + 10$   
 $\Rightarrow$  faccio la radice (posso perché...)  
e ottengo  $x_{n+2} \leq x_{n+1}$   
— o — o —

**PIANO CON LA MONOTONIA**

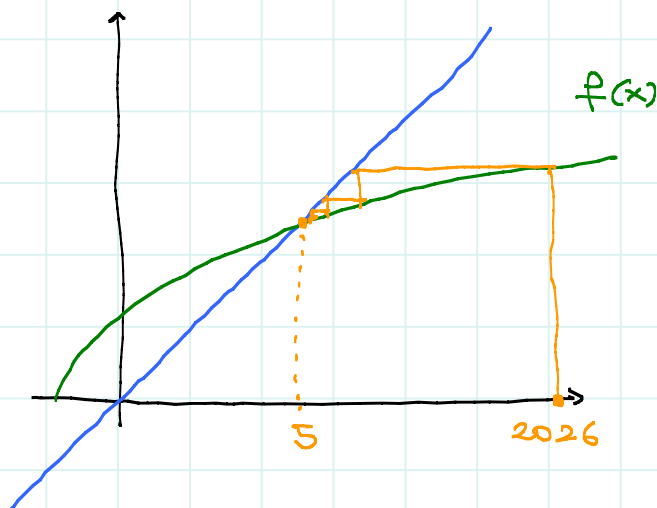
- (i) Dove sta  $x_n$
- (ii) Monotonia
- (iii)  $x_n \rightarrow l$  da qualche parte
- (iv) trovo  $l$

Come ottengo il piano?

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10}$$

"  $f(x_n)$

Disegno il grafico di  $f$  e la bisettrice

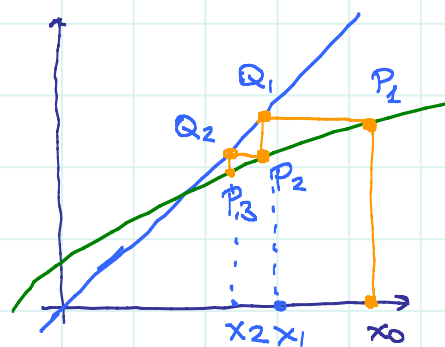


I p.ti di incontro si trovano risolvendo  $l = f(l)$ , cioè l'eq. del p.to (iv).

**SLOGAN** Parto da  $x_0 = 2026$  e faccio  
 → VERTICALE ALLA FUNZIONE  
 → ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE

Perché funziona?

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1) \\ Q_1 &= (x_1, x_1) \\ P_2 &= (x_1, x_2) \\ Q_2 &= (x_2, x_2) \end{aligned}$$



Quando applico lo slogan, le coord x dei vari p.ti sono  $x_0, x_1, x_2, \dots$

Esempio  $x_{n+1} = \arctan x_n$   
 $x_0 = 2026$

- (i)  $0 \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (ii)  $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (iii)  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
  - (iv)  $l = 0$
- ] inclus.      ] teo. succ. monot.      ]  $l = f(l)$  con studio funz.

