

Sistemi di succ. per ricorrenza

Esempio 1 $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \end{cases} \quad a_0 \text{ e } b_0 \text{ dati}$

SLOGAN: due ricorrenze di ordine 1 $\leadsto$ singola ricorrenza di ordine 2
(gli ordini si sommano)

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} + 3a_n + 5b_n = 3a_{n+1} + 3a_n + 5a_{n+1} - 15a_n$$

$\uparrow$ shift indici sulla 1^a $\uparrow$ uso 2^a $\uparrow$ $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ dalla 1^a

$$\leadsto a_{n+2} = 8a_{n+1} - 12a_n$$

Questa si risolve: $x^2 - 8x + 12 = 0$, $(x-2)(x-6) = 0$

Soluz. generale

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 6^n$$

Sempre dalla 1^a: $b_n = a_{n+1} - 3a_n$

$$= C_1 \cdot 2^{n+1} + C_2 \cdot 6^{n+1} - 3C_1 \cdot 2^n - 3C_2 \cdot 6^n$$

$$\leadsto b_n = -C_1 \cdot 2^n + 3C_2 \cdot 6^n$$

Achtung! I C_1 e C_2 nella formula per b_n sono gli stessi di quella per a_n .

Il procedimento funziona bene se le ricorrenze sono lineari (il p.to chiave è ricavare b_n). Eventuali termini non omog. non danno fastidio.

Interpretazione alternativa: pongo $U_m = \begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$
e riscrivo la ricorrenza come

$$U_{m+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_M U_m$$

$$U_{m+1} = M U_m$$

$$\leadsto U_m = M^m U_0$$

Sistemi di eq. diff.

$$\begin{cases} u' = 3u + v \\ v' = 3u + 5v \end{cases}$$

$u(0)$ e $v(0)$ cond. iniziali date

Slogan $\leadsto$ singola equazione di ordine 2.

$$u'' = \underset{\substack{\uparrow \\ 1^a \text{ derivata}}}{3u'} + v' = 3u' + \underset{\substack{\uparrow \\ v' \text{ dalla } 2^a}}{3u + 5v} = 3u' + 3u + \underset{\substack{\uparrow \\ v \text{ dalla } 1^a}}{5u' - 15u} = 8u' - 12u$$

$v = u' - 3u$

$$\leadsto u'' = 8u' - 12u$$

$$\leadsto x = 2 \text{ e } x = 6$$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{6t}$$

Dalla 1^a ricavo $v(t) = u'(t) - 3u(t)$

$$\begin{aligned} &= 2a e^{2t} + 6b e^{6t} - 3a e^{2t} - 3b e^{6t} \\ &= -a e^{2t} + 3b e^{6t} \end{aligned}$$

Posso scrivere la soluzione come

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{2t} + b e^{6t} \\ -a e^{2t} + 3b e^{6t} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Fatto generale: 2 e 6 sono gli autovalori della matrice
 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono i corrispondenti autovettori

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} \quad ;$$

Ancora più in generale: per un sistema di eq. diff. del tipo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettori} \\ \text{lungo } n}}{U}' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ n \times n}}{M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore} \\ \text{lungo } n}}{U}$$

Se la matrice M è diagonalizzabile, allora la soluzione generale del sistema è

$$U(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametri} \\ \text{liberi}}}{u_k} e^{\underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_k t}}{\text{autovalori della matrice}}} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{autovettori corrispondenti}}}{u_k}$$

Dim Banale sostituzione dei singoli pezzi.

SLOGAN OPPOSTO Ogni equazione diff. qualunque di ordine k è equivalente ad un sistema di k equazioni di ordine 1.

Esempio $u''' + 5u'' + 6\sin(tu') = u^2 + 3$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \quad [\text{Moralmente } u'' = v' = w] \\ w' + 5w + 6\sin(tu') = u^2 + 3 \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 u''' u'' u'

Conseguenza teorica: se so fare i teoremi di esistenza / unicità per SISTEMI di ordine uno, li ho gratis per SISTEMI / EQUAZIONI di ordine qualunque.

DELIRIO Equazione $u' = a u \rightsquigarrow u(t) = c e^{at}$
 $\uparrow$ numero $\uparrow u(0)$

$u' = a(t) u \rightsquigarrow u(t) = c e^{A(t)}$ dove $A'(t) = a(t)$

Se prendo un sistema $U' = M U$
 $\uparrow$ matrice $n \times n$

La soluzione sarà $U(t) = e^{Mt} \cdot U(0)$
 $\uparrow$ vettore $\uparrow$ esponenziale di una matrice $\uparrow$ vettore

$U' = M(t) U \rightsquigarrow U(t) = e^{\hat{M}(t)} U(0)$

dove $\hat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ integrale fatto coeff. per coeff.

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots$

$e^M = Id + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{3} M^3 + \dots$

Idea: con Taylor posso fare funzioni strane di matrici

Come si calcola? Diagonalizzo $\rightsquigarrow$ faccio e $\rightsquigarrow$ torno indietro
 $\uparrow$ tizi sulla diagonale

[Semplicemente altro modo di dire la formula con autov. / autovetori].

— o — o —