

L'ESEMPIO

FIBONACCI

$$x_{m+2} = x_{m+1} + x_m$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \leadsto \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sol. generale $x_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

$$0 = x_0 = a + b \quad \leadsto \quad b = -a$$

$$1 = x_1 = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - a \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = a\sqrt{5} \quad \leadsto \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Conclusione

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

Oss. La formula è piena di $\sqrt{5}$, ma poi i numeri sono tutti interi, quindi le $\sqrt{5}$ se ne vanno !!

Un discorso analogo vale se le radici del pol. sono numeri complessi, ma i dati iniziali sono reali / interi.

Qual è il limite del rapporto tra due Fibonacci consecutivi?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(chi comanda si raccoglie:
l'altra radice ha val. assol. < 1)

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34

x_n miglia sono $\sim x_{n+1}$ km perché $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim$ conversione miglia / km

Le soluzioni di una ricorrenza lin. omog. sono ker di qualcosa?

Sì! Pensiamo a $x_{m+2} = 5x_{m+1} - 6x_m$

Sia Succ lo spazio vett. delle succ. di numeri reali.

Consideriamo

$$L: \text{Succ} \rightarrow \text{Succ}$$

definita da

$$L(\{x_m\}) = \{x_{m+2} - 5x_{m+1} + 6x_m\}$$

Il ker sono le succ. che verificano la ricorrenza
e sono uno sp. vett. di dim 2 (in generale di dim = ordine)
(Basta considerare quelle con dati iniziali 0, 1 e 1, 0)

DIM SOLITA FORMULA CON METODO "ARITMETICO" $x_{m+2} = \alpha x_{m+1} + \beta x_m$

Invece di considerare x_m come incognita, considero

$$p_m(t) = \beta x_m + x_{m+1} t \quad (\text{mod } t^2 - \alpha t - \beta)$$

$$\begin{aligned} t \cdot p_m(t) &= \beta x_m t + x_{m+1} t^2 && \text{uso che } t^2 \equiv \alpha t + \beta \\ &= \beta x_m t + x_{m+1} (\alpha t + \beta) \\ &= \beta x_{m+1} + (\beta x_m + \alpha x_{m+1}) t \\ &= \beta x_{m+1} + x_{m+2} t \\ &= p_{m+1}(t) \end{aligned}$$

Quindi $p_m(t) = t^m p_0(t) = t^m (\beta x_0 + x_1 t) \quad \text{mod } \dots$

Noto $p_m(t)$, i suoi coeff. mi danno x_m e x_{m+1} !!!

Come calcolo il quoziente? Devo togliere il modulo.

So che $p_m(t) = t^m (\beta x_0 + x_1 t) + Q_m(t) (t^2 - \alpha t - \beta)$
 $\uparrow$
misterioso

Se sostituisco a t le due radici λ e μ

$$\begin{cases} \beta x_m + x_{m+1} \lambda = \lambda^m (\beta x_0 + x_1 \lambda) \\ \beta x_m + x_{m+1} \mu = \mu^m (\beta x_0 + x_1 \mu) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Le parti con } Q_m \\ \text{se ne vanno!} \end{array}$$

Questo è un sistema lin. in x_m e x_{m+1} .

DIM CON METODI DI ALG. LINEARE

Pongo $U_m = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_m \end{pmatrix}$. Allora

$$U_{m+1} = \begin{pmatrix} x_{m+2} \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{m+1} + \beta x_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_m \end{pmatrix}$$

Quindi

$$U_{m+1} = M U_m$$

da cui

$$U_m = M^m U_0$$

Quindi bisogna fare la potenza m -esima della matrice M , che si fa diagonalizzando... chi sono gli autovalori?

$$\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta = 0$$

Nel caso della radice di mult. 2, la matrice non si diagonalizza ma si jordanizza e diventa

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$M^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m \lambda^{m-1} \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

Esercizio 1 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

Supponiamo $x_0 = 2026$

Domanda: esistono soluz. limitate?

Detto altrimenti: posso scegliere x_1 in modo che resti limitata?

Sol. generale: $x_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

L'unica possibilità è che $a=0$. Quindi basta prendere $b=2026$ ed è fatta :).

Quindi $x_1 = 1013(1-\sqrt{5})$

Esercizio 2 $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n + n + 2^n$

Trovare tutte le soluzioni

Parte omog. : $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
 $\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

$$x_n = a 3^n + b (-2)^n$$

Ora cerco sol. speciali con n e 2^n . Lo posso fare separatamente

$\bar{x}_n = an + b$. Sostituisco

$$\underbrace{a(n+2)+b}_{x_{n+2}} = \underbrace{a(n+1)+b}_{x_{n+1}} + \underbrace{6(an+b)}_{+6x_n} + n$$

$$\begin{cases} a = a + 6a + 1 & \text{coeff. } n & a = -\frac{1}{6} \\ 2a + b = a + b + 6b & \text{termine noto} & b = \dots \end{cases}$$

$$\bar{x}_n = C \cdot 2^n$$

$$C \cdot 2^{n+2} = C \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot C \cdot 2^n + 2^n$$

$$\Rightarrow 4C = 2C + 6C + 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Sommando viene.

Oss. Se al RHS avevo 3^n , allora $\bar{x}_n = c \cdot 3^n$ non poteva funzionare.

In questo caso dovevo usare

$$\bar{x}_n = c \cdot n 3^n$$

— 0 — 0 —