

SUCCESIONI PER RICORRENZA

$$x_{n+1} = 3x_n - 1$$

Dato un termine posso
calcolare il successivo

$$x_0 = 2$$

Dato iniziale

Posso iterare: $x_0 = 2$, $x_1 = 3x_0 - 1 = 5$, $x_2 = 3x_1 - 1 = 14$, ...

Se voglio x_{2026} , mi devo fare tutti quelli prima.

$$x_{n+1} = 3x_n - n$$

$$x_0 = 2$$

Regola di passaggio
cambia ogni volta

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 3x_0 - \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0} = 6$$

$$x_2 = 3 \cdot x_1 - \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{1} = 17, \dots$$

Più in generale

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$\uparrow$
AUTONOMO

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

$\uparrow$
NON AUTONOMO

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n^2$$

$$x_0 = 2 \quad x_1 = 7$$

Due cond. iniziali

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$$

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n, n)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
succ. per ricorrenza di ordine 2: dipendenza
dai due termini precedenti

Analogo per successioni di ordine k .

Domande: → Trovare se possibile una FORMULA CHIUSA per calcolare un termine senza passare dai precedenti
→ Determinare il limite ed eventuali ordini di infinito / infinitesimo senza avere la formula.

Il primo non riesce quasi mai, sul secondo si può lavorare.

Esempio 0 $x_{n+1} = a x_n$

In questo caso $x_n = a^n x_0$ ~ facile indagine :)

Esempio 1 $x_{n+1} = a x_n + b$

Esplorazione

$$\begin{aligned}x_1 &= a x_0 + b \\x_2 &= a x_1 + b = a^2 x_0 + a b + b \\x_3 &= a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + a b + b \\x_4 &= \dots = a^4 x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1) \\&= a^4 x_0 + b \frac{a^4 - 1}{a - 1}\end{aligned}$$

Congettura: $x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$ se $a \neq 1$

$x_{n+1} = x_0 + n b$ se $a = 1$ [N.B. $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^n - 1}{a - 1} = n$:)]

DIM 1 Indagine standard

DIM 2 Pongo $y_n = x_n - l$, dove l è da decidere. Cosa risolve?

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= x_{n+1} - l = a x_n + b - l = a (y_n + l) + b - l \\&\quad \uparrow \text{ric.} \quad \quad \quad \uparrow \text{ricavo } x_n \\&= a y_n + (a l + b - l)\end{aligned}$$

Scelgo l t.c. $al+b-l=0$, cioè $(a-1)l=-b$
 cioè $l = -\frac{b}{a-1}$

In questo modo viene $y_{m+1} = ay_m$, cioè

$$y_m = a^m y_0 = a^m (x_0 - l)$$

e quindi $x_m = y_m + l = a^m (x_0 - l) + l$
 $= a^m x_0 - l (a^m - 1)$
 $= a^m x_0 + b \frac{a^m - 1}{a - 1} \quad \ddot{\smile}$

DIM 3 $x_{m+1} = ax_m + b$

Pseudo $y_{m+1} = ay_m$ da cui $y_m = a^m y_0$

Pseudo $z_{m+1} = az_m + b$

Se pongo $w_m = y_m + z_m$, cosa risolve w_m ?

$$w_{m+1} = y_{m+1} + z_{m+1} = ay_m + az_m + b = a(y_m + z_m) + b = aw_m + b$$

Esiste una z_m "comoda"? Sì! Esiste una z_m costante $z_m \equiv l$
 $l = al + b \quad l = -\frac{b}{a-1}$

Allora $x_m = c \cdot a^m - \frac{b}{a-1}$ risolve la ricorrenza per ogni valore di c

Ora basta trovare c in modo da rispettare la cond. iniziale!
 $\rightarrow$ finire il conto.

Oss. La DIM 3 mostra che tutte le soluz. di $x_{m+1} = ax_m + b$ sono del tipo

$$x_m = c \cdot a^m - \frac{b}{a-1}$$

$\uparrow$ parametro libero

Esempio 2 $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$

CLAIM Tutte le soluzioni sono del tipo

$$x_n = a 2^n + b 3^n$$

Enistrica: vedo se $x_n = \lambda^n$ può essere soluzione. Sostituisco:

$$\lambda^{n+2} \stackrel{?}{=} 5\lambda^{n+1} - 6\lambda^n \quad \leadsto \quad \lambda^2 = 5\lambda - 6 \quad \leadsto \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\leadsto (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Quindi $x_n = 2^n$ e $x_n = 3^n$ sono soluzioni!

Dimi Ho verificato che 2^n e 3^n sono sol.

Essendo tutto lineare, lo sono i loro multipli
e pure le loro comb. lineari.

Quindi tutte le succ. $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n$ sono solus.

Ce ne sono altre?

No! Scegliendo bene a e b io posso sistemare le cond. i.c.i's.

x_0 e x_1 , e a quel p.to è per forza unica.

$$\begin{aligned} a + b &= x_0 \\ 2a + 3b &= x_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo stesso metodo funziona per tutte le ricorrenze del tipo

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$$

Tutto sta a trovare le radici del pol. caratteristico

$$x^2 - \alpha x - \beta = 0$$

- se sono λ e μ reali $\leadsto x_n = a \lambda^n + b \mu^n$
- se $\lambda \in \mathbb{R}$ di mult. 2 $\leadsto x_n = a \lambda^n + b n \lambda^n$
- se sono $\rho e^{i\theta}$, $\rho e^{-i\theta}$ $\leadsto x_n = a \rho^n e^{i\theta n} + b \rho^n e^{-i\theta n}$
 $= \hat{a} \rho^n \cos(\theta n) + \hat{b} \rho^n \sin(\theta n)$

Verifica del caso con molteplicità 2.

Sostituisco $x_n = n \lambda^n$

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$$

$$(n+2) \lambda^{n+2} \stackrel{?}{=} \alpha (n+1) \lambda^{n+1} + \beta n \lambda^n$$

$$(n+2) \lambda^2 \stackrel{?}{=} \alpha (n+1) \lambda + \beta n$$

$$n(\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta) + \underbrace{2\lambda^2 - \alpha \lambda}_{=0} \stackrel{?}{=} 0$$

= 0 perché
 λ è radice del
pol. caratt.

$$\underbrace{\lambda(2\lambda - \alpha)}_{\text{"}}$$

↑ λ annulla la deriv. del.
pol. caratteristico
perché ha molteplicità 2

La teoria si estende a ricorrenze lineari omogenee di ordine n

— o — o —