

Esercizio 1 (Autovalori della derivata seconda)

$$u'' = \lambda u$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

PROBLEMA DI DIRICHLET

Domanda: per quali valori di λ esistono soluzioni NON IDENT. NULLE
(se $u(t)$ è soluzione, allora $c u(t)$ è sol. per ogni $c \in \mathbb{R}$,
quindi per un certo λ , o non ci sono sol, o ce ne
sono ∞)

$$\boxed{\lambda > 0} \quad u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t)$$

$$u(0) = 0 \rightsquigarrow a = 0 \rightsquigarrow u(t) = b \sin(\sqrt{\lambda} t)$$

$$u(1) = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

$$\Rightarrow \text{l'unica sol. è } u(t) \equiv 0$$

$$\boxed{\lambda = 0} \quad u(t) = a + bt \quad \text{è una retta.}$$

$$\text{Cond. iniz.} \rightsquigarrow u(t) \equiv 0$$

$$\boxed{\lambda < 0} \quad u(t) = a \cos(\sqrt{-\lambda} t) + b \sin(\sqrt{-\lambda} t)$$

$$u(0) = 0 \rightsquigarrow a = 0 \rightsquigarrow u(t) = b \sin(\sqrt{-\lambda} t)$$

$$u(1) = 0 \rightsquigarrow b \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \rightsquigarrow b \text{ qualunque} \\ \searrow b = 0 \end{array}$$

L'unico caso con sol. non ident. nulla è quando $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$

$$\text{cioè } \sqrt{-\lambda} = k\pi, \text{ cioè } \boxed{\lambda = -k^2\pi^2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$\uparrow$ autovalori della der. sec. con quelle condizioni

Oss. Sono autovalori nel senso vero se penso la deriv. seconda come appl. lin. $C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 2 $\dot{u} = u^p$ $u(0) = 2026$ $p > 0$

Oss. La soluzione per $t \geq 0$ è crescente e sempre ≥ 2026

Domanda: nel futuro, ha esistenza globale oppure BU?

$\boxed{p=1}$ $\dot{u} = u \rightsquigarrow u(t) = 2026 e^t \rightsquigarrow$ esistenza globale

$\boxed{p=2}$ $\dot{u} = u^2 \rightsquigarrow \frac{du}{u^2} = dt \rightsquigarrow -\frac{1}{u} = t + c \rightsquigarrow u = \frac{1}{c-t}$

$\rightsquigarrow 2026 = \frac{1}{c} \rightsquigarrow u(t) = \frac{2026}{1-2026t}$ [Verifica!]

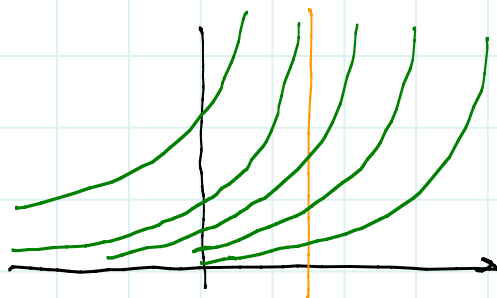
La soluzione ha BU per $t = \frac{1}{2026}$

Oss. Se il dato iniz. era $u(0) = \alpha > 0$, la sol. era

$$u(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha t} \quad \text{con BU in } t = +\frac{1}{\alpha}$$

Il tempo di vita $\rightarrow 0$ per $\alpha \rightarrow +\infty$ e $\rightarrow +\infty$ per $\alpha \rightarrow 0$

Eq. autonoma: le soluzioni si ottengono l'una dall'altra per traslazione



$\boxed{p=\frac{1}{2}}$ $\dot{u} = \sqrt{u}$ $\frac{du}{\sqrt{u}} = dt \rightsquigarrow 2\sqrt{u} = t + c$

$u = \left(\frac{t}{2} + c\right)^2 \rightsquigarrow u(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{2026}\right)^2 \rightsquigarrow$ esistenza globale nel futuro

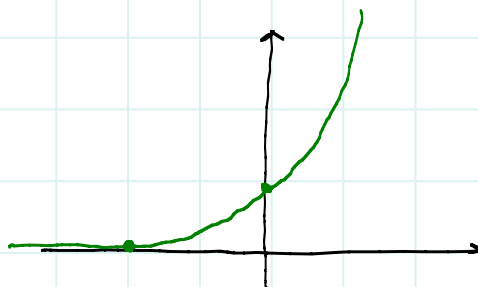
Achtung! Una parabola può essere sol. di un'eq. autonoma?
NO! Intersecherebbe le sue traslate!

Occhio: la formula vale solo per $\frac{t}{2} + \sqrt{2026} \geq 0$

Quindi la soluzione nei negativi diventa definitivamente $\equiv 0$.

Tutte le sue traslate sono soluz.

(PENNELLO DI PEANO)



Risposta domanda iniz.: $\rightarrow$ per $p > 1$ ho BU

$\rightarrow$ per $p \leq 1$ ho esistenza globale nel futuro

$\rightarrow$ per $p < 1$ la soluz. è $\equiv 0$ per t abbastanza negativi.

Caso $p > 1$ $\ddot{u} = u^p \rightsquigarrow \frac{du}{u^p} = dt \rightsquigarrow \frac{1}{1-p} \frac{1}{u^{p-1}} = t + c$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{u^{p-1}} = (1-p)t + c \rightsquigarrow u^{p-1} = \frac{1}{c - (p-1)t}$$

$$\rightsquigarrow u(t) = \left[\frac{1}{c - (p-1)t} \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

Imponendo $u(0) = 2026$ trovo $c > 0$.

A questo p.to la sol. ha BU per $t = \frac{c}{p-1} > 0$ perché $p > 1$.

Domandare: $\ddot{u} = g(u)$ $u(0) = 2026$

e supponiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ (g cresce più di x)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 0 \quad \forall p > 1$ (g cresce meno di x^p con $p > 1$)

Classico esempio $x \log x$ oppure $x \log^2 x$

La vera condizione è

$$\int_{2026}^{+\infty} \frac{1}{g(x)} dx = +\infty \quad \leadsto \text{esistenza globale}$$

$$\dot{u} = g(u) \quad \leadsto \quad \frac{1}{g(u)} du = dt$$

$$\leadsto \Gamma(u) = t + c \quad \text{dove} \quad \Gamma' = \frac{1}{g}$$

Come è fatta $\Gamma(x)$? $\Gamma(x) = \int_{2026}^x \frac{1}{g(y)} dy$



- Se l'int. improprio converge, allora Γ ha asintoto all'infinito, quindi è limitata dall'alto, quindi non posso risolvere $\Gamma(u) = t + c$ quando t è troppo grande $\leadsto$ BU
- Se l'int. improprio diverge, allora Γ ha come immagine tutto $[0, +\infty)$, quindi $\Gamma(u) = t + c$ permette di trovare u anche per t grandi $\leadsto$ esistenza globale

— o — o —