

Eq. Diff. Lin. NON OMOG

$$Lu = f(t)$$

Problema: come trovo una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$.

Tecniche

→ Provare a indovinare

→ Variazione delle costanti (funziona sempre, anche se l'eq. usu è a coeff. costanti)

Esempio 1 $u'' - 2u' - 3u = e^{2t}$

Metodo classico: $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \leadsto x=3 \text{ e } x=-1$

Tentativo: $\bar{u}(t) = ae^{2t}$ $\bar{u}'(t) = 2ae^{2t}$ $\bar{u}''(t) = 4ae^{2t}$

$$4ae^{2t} - 4ae^{2t} - 3ae^{2t} = e^{2t} \quad a = -\frac{1}{3}$$

La soluzione generale è
$$u(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + ae^{-t} + be^{3t}$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI Cerco

$$\bar{u}(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{3t} \quad (\text{ora } a(t) \text{ e } b(t) \text{ sono funzioni incognite})$$

$$\bar{u}'(t) = \underline{a'(t)e^{-t}} - a(t)e^{-t} + \underline{b'(t)e^{3t}} + 3b(t)e^{3t}$$

Impongo che la somma dei termini con $a'(t)$ e $b'(t)$ si annulli

$$\boxed{a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{3t} = 0} \quad 1^a \text{ equazione}$$

$$\bar{u}''(t) = -a'(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} + 9b(t)e^{3t}$$

(non derivo i due termini la cui somma ho imposto = 0)

Sostituisco nell'equazione

$$\begin{aligned} & -a'(t)e^{-t} + \cancel{a(t)e^{-t}} + 3b'(t)e^{3t} + \cancel{9b(t)e^{3t}} \\ & + \cancel{2a(t)e^{-t}} - \cancel{6b(t)e^{3t}} \\ & - \cancel{3a(t)e^{-t}} - \cancel{3b(t)e^{3t}} \\ & = e^{2t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \bar{u}'' \\ & -2\bar{u}' \\ & -3\bar{u} \\ & = e^{2t} \end{aligned}$$

DEVE succedere che i termini con $a(t)$ e $b(t)$ non derivati se ne vanno.

[Infatti sono uguali ad $a(t)$ equazione calcolata in e^{-t}
 $b(t)$ e^{3t}]

$$\boxed{-a'(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} = e^{2t}} \quad 2^a \text{ equazione}$$

Le due equazioni sono un sistema Lin in $a'(t)$ e $b'(t)$ che posso risolvere

$$\begin{cases} a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{3t} = 0 \\ -a'(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} = e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{Sommo: } 4b'(t) = e^{2t} \rightsquigarrow 4b'(t)e^{3t} = e^{2t} \rightsquigarrow b'(t) = \frac{1}{4}e^{-t} \rightsquigarrow b(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}$$

$$\begin{aligned} 1^a \text{ eq. } \rightsquigarrow a'(t)e^{-t} &= -b'(t)e^{3t} = -\frac{1}{4}e^{2t} \rightsquigarrow a'(t) = -\frac{1}{4}e^{3t} \\ \rightsquigarrow a(t) &= -\frac{1}{12}e^{3t} \end{aligned}$$

Conclusione:

$$\bar{u}(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{3t} = -\frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} = -\frac{1}{3}e^{2t} \quad \text{😊}$$

— o — o —

Eq. Diff. Lineari 1° ordine generali

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Soluzione generale è data da

$$u(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(s)} b(s) ds$$

↑ primitiva qualunque di $e^{A(s)} b(s)$

dove $A'(t) = a(t)$ (primitiva qualunque)

Se ho la condizione di Cauchy $u(t_0) = u_0$, allora la soluzione è

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds$$

dove $A(t)$ è LA primitiva di $a(t)$ che si annulla in t_0 e anche il secondo integrale ha gli estremi e si annulla in t_0 .

Dim Derivare e sostituire ☺ (farlo per esercizio)

Euristica 1 $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$

Moltiplico a dx e sx per $e^{A(t)}$ ~ FATTORE INTEGRANTE

$$u'(t) e^{A(t)} + u(t) \cdot a(t) e^{A(t)} = e^{A(t)} b(t)$$

$$[u(t) e^{A(t)}]' = e^{A(t)} b(t)$$

$$\Rightarrow u(t) e^{A(t)} = \int e^{A(s)} b(s) ds + C$$

A questo p.to basta portare $e^{A(t)}$ al RHS.

Emistica 2

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

Basta risolvere l'omogenea e poi cercare soluzione $\bar{u}(t)$ della non omogenea.

Omogenea : $u'(t) + a(t)u(t) = 0 \rightsquigarrow u'(t) = -a(t)u(t)$

Questa è a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = -a(t)u(t) \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)dt \rightsquigarrow \log|u| = -A(t) + c$$

$$|u(t)| = e^{-A(t)+c} \rightsquigarrow u(t) = c e^{-A(t)} \quad [\text{verifica}]$$

Non omogenea : cerco $\bar{u}(t) = c(t) e^{-A(t)}$ (variazione delle costanti)

$$\bar{u}'(t) = c'(t) e^{-A(t)} - c(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\bar{u}'(t) + a(t)\bar{u}(t) = c'(t) e^{-A(t)} - \cancel{c(t)a(t)e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} = b(t)$$

$$\rightsquigarrow c'(t) = e^{A(t)} b(t) \rightsquigarrow c(t) = \int e^{A(s)} b(s) ds$$

$$\rightsquigarrow \bar{u}(t) = e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds$$

Isda 3-bis Eq. BERNOULLI

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)[u(t)]^k$$

Si riducono immediatamente al 3 con un cambio di variabili

Esempio 1

$$u' = t u + \arctan t \cdot u^3$$

Divido per u^3 :

$$\frac{u'}{u^3} = t \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{v'} + \arctan t$$

Pongo $v(t) = \frac{1}{u(t)^2} \rightsquigarrow v'(t) = -2 \frac{u'(t)}{u(t)^3} \rightsquigarrow \frac{u'}{u^3} = -\frac{1}{2} v'$

e quindi $-\frac{1}{2} v' = t v + \arctan t \rightsquigarrow 3^a \text{ isola}$

Esempio 2 $u' = t^2 u + \frac{\sin t}{u^4}$

$$u^4 u' = t^2 u^5 + \sin t$$

$$v = u^5 \quad v' = 5u^4 u' \rightsquigarrow \frac{1}{5} v' = t^2 v + \sin t \rightsquigarrow \text{☺}$$

— 0 — 0 —