

Oss. Perché e^{at} , e^{bt} , e^{ct} sono lin. indep.? Se a, b, c sono diversi

Considero $v(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{bt} + c_3 e^{ct}$

$$v(0) = 0 \quad \leadsto \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$\dot{v}(0) = 0 \quad \leadsto \quad ac_1 + bc_2 + cc_3 = 0$$

$$\ddot{v}(0) = 0 \quad \leadsto \quad a^2 c_1 + b^2 c_2 + c^2 c_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

↑ VANDERMONDE

$\text{Det} \neq 0 \Rightarrow$ l'unica sol. è $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow \ddot{v}$

Esercizio 1 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = 0$

$$\leadsto x^2 + 5x + 6 = 0 \quad \leadsto \quad x = -2 \text{ e } x = -3 \quad \leadsto \quad u(t) = ae^{-2t} + be^{-3t}$$

Esercizio 2 $\ddot{u} + 6\dot{u} + 13u = 0$

$$\leadsto x^2 + 6x + 13 = 0 \quad \leadsto \quad x = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm 2i$$

$$u(t) = ae^{-3t} \cos(2t) + be^{-3t} \sin(2t)$$

Esempio 3 $\ddot{u} + 4u = 0 \quad \ddot{u} = -4u$

$$\leadsto x^2 + 4 = 0 \quad \leadsto \quad x = \pm 2i \quad \leadsto \quad \text{base: } e^{0t} \cdot \cos(2t), e^{0t} \cdot \sin(2t)$$

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

Esempio 4 $\ddot{u} - 4u = 0$

$$\leadsto x^2 - 4 = 0 \leadsto x = \pm 2 \leadsto u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$$

$\uparrow$ base $\uparrow$

Un'altra base è $\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}, \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$

Quindi posso scrivere $u(t) = a \cosh(2t) + b \sinh(2t)$

Esempio 5 $\ddot{u} + 4\dot{u} = 0$

$$\leadsto x^2 + 4x = 0 \leadsto x = 0 \text{ e } x = -4 \leadsto u(t) = a + b e^{-4t}$$

Esempio 6 $u^{(4)} - 4u = 0$

$$x^4 - 4 = 0 \leadsto x = \pm\sqrt{2} \text{ e } x = \pm\sqrt{2}i$$

$$u(t) = a \cos(\sqrt{2}t) + b \sin(\sqrt{2}t) + c \cosh(\sqrt{2}t) + d \sinh(\sqrt{2}t)$$

Esempio 7 $u^{(4)} + 9u'' = 0$

$$x^4 + 9x^2 = 0 \leadsto x^2(x^2 + 9) = 0 \leadsto x = \pm 3i \quad \begin{matrix} e^{3it}, b.e^{3it} \\ \uparrow \\ x=0 \text{ di mult. 2} \end{matrix}$$

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t) + c + dt$$

Esempio 8 $u^{(4)} + 2u'' + u = 0$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \leadsto (x^2 + 1)^2 = 0 \leadsto x = \pm i \text{ con mult} = 2$$

$$u(t) = a \cos t + b \sin t + ct \cos t + dt \sin t$$

Eq. Diff. Lin. NON omogenee

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t) \quad Lu = f$$

Ancora una volta le soluz. esistono sull'intervallo comune in cui sono def. i coeff. ed il termine forzante $f(t)$.

La soluzione generale è del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\uparrow \text{sol. qualunque dell'eq. non omog.}}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\substack{\uparrow \text{sol. generale eq. omogenea} \\ \text{corrispondente}}}$$

[Caso particolare di enunciato per applic. lin. generiche]

Come trovo una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$?

Ci sono due metodi

- provare a indovinare (comodo ma poco sistematico)
- metodi di variazione delle costanti (funziona sempre, ma sono tanti casi)

Esempio 1 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^t$

Cerco $\bar{u}(t) = ae^t$. Sostituisco $\bar{u}'(t) = ae^t = \bar{u}''(t)$

$$ae^t + 5ae^t + 6ae^t = e^t \quad \leadsto 12ae^t = e^t \quad \leadsto a = \frac{1}{12}$$

Sol. gen. $u(t) = \frac{1}{12}e^t + \underbrace{ae^{-2t} + be^{-3t}}_{\text{parte omog.}}$

Esempio 2 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{2t}$

$$\bar{u}(t) = ae^{2t} \quad \bar{u}'(t) = 2ae^{2t} \quad \bar{u}''(t) = 4ae^{2t}$$

$$(4a + 10a + 6a)e^{2t} = e^{2t} \rightsquigarrow a = \frac{1}{20} \rightsquigarrow \text{come prima}$$

Esempio 3 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{-2t}$

Vorrei tanto provare $\bar{u}(t) = ae^{-2t}$... ma è soluzione dell'omog.
quindi per forza $L\bar{u} = 0$.

Come se ne esce?

Provo con $\bar{u}(t) = ate^{-2t}$. Sostituisco

$$\bar{u}'(t) = ae^{-2t} - 2ate^{-2t}$$

$$\bar{u}''(t) = -2ae^{-2t} - 2ae^{-2t} + 4ate^{-2t}$$

$$\underbrace{-4ae^{-2t} + 4ate^{-2t}}_{\ddot{u}} + \underbrace{5ae^{-2t} - 10ate^{-2t}}_{+ 5\dot{u}} + \underbrace{6ate^{-2t}}_{+ 6u} = e^{-2t}$$

Le parti con $2at$ se ne sono andate. Doveva succedere!

Infatti sono t . quello che succedeva sostituendo e^{-2t}

Resta $ae^{-2t} = e^{-2t} \rightsquigarrow a = 1$

La sol. generale è

$$u(t) = te^{-2t} + ae^{-2t} + be^{-3t}$$

Oss. Se e^{-2t} e te^{-2t} erano sol. dell'omog., allora il tentativo da fare era

$$\bar{u}(t) = at^2e^{-2t}$$

(slogan: t finché basta!)

Esempio 4

$$\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = t^2 + \sin(2t)$$

1ª osserv. Basta risolvere separatamente

$$L\bar{u}_1 = t^2$$

$$L\bar{u}_2 = \sin(2t)$$

e poi prendere $\bar{u}_1 + \bar{u}_2$

Per ottenere t^2 provo con $\bar{u}(t) = \underline{at^2 + bt + c}$
pol. gen. dello STESSO grado

$$\bar{u}'(t) = 2at + b$$

$$\bar{u}''(t) = 2a$$

Sostituisco:

$$2a + 5(2at + b) + 6(at^2 + bt + c) = t^2$$

$$2a + \underline{10at} + 5b + \underline{6at^2} + \underline{6bt} + 6c = \underline{t^2}$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 10a + 6b = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare TRIANGOLARE, quindi
di sicuro si risolve

Per ottenere $\sin(2t)$ provo con $\bar{u}(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$
e sostituendo trovo un sistema lineare in a e b .

— 0 — 0 —