

Eq. Diff. Lineari OMOGENEE

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0$$

dove $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sono i coeff. dell'equazione.

Fatto mist. 1 Perché si possa portare in forma normale, cioè se

$$a_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

la soluzione esiste su tutto $[a, b]$.

(per un'eq. lin., la sol. esiste finché può)

Fatto mist. 2 Nelle ipotesi di sopra, l'unica soluzione con dati di Cauchy tutti nulli è $u(t) \equiv 0$.

Oss. Risolvere l'eq. vuol dire trovare il ker dell'applicazione lineare

$$Lu := \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t)$$

pensata come $L : C^k([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$

[Si tratta solo di verificare che L è lineare, cioè

$$L(u+v) = Lu + Lv \quad \forall u, v \in [C^k([a, b])]^2$$

$$L(cu) = cLu \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \forall u \in C^k([a, b])]$$

Teorema Nelle solite ipotesi (forma normale) l'insieme delle soluzioni è uno sp. vett. di dimensione k .

(quindi i k parametri liberi compaiono come coeff. di una combinazione lineare)

Dim Che è sp. vett. è ovvio perché è un ker.

Devo esibire una base $u_1(t), \dots, u_k(t)$.

Fisso $t_0 \in [a, b]$ e definisco $u_i(t)$ come la sol. dell'eq. con dati di Cauchy

$$u_i^{(j)}(t_0) = \delta_{i,j+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{se } j \neq i-1 \end{cases}$$

Per il fatto mist. 1 questa soluzione esiste in tutto $[a, b]$.

Sono generatori Prendiamo una qualunque altra soluzione $u(t)$. Questa avrà i suoi dati di Cauchy

$$u^{(j)}(t_0) = c_{j+1} \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1$$

Dico che

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

Basta osservare che $u(t) - \text{RHS}$ è ancora una soluzione dell'equazione e in t_0 si annulla insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $k-1$.

Per il fatto misterioso 2, la differenza è $\equiv 0$, quindi u è comb. lineare di $u_1(t), \dots, u_k(t)$.

Sono lin. indep. Supponiamo che una comb. lin. sia $\equiv 0$, cioè

$$v(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Ora basta osservare che

$$0 = v^{(j)}(t_0) = \sum_{i=1}^k c_i u_i^{(j)}(t_0) = c_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, k-1$$

e quindi tutti i coeff. sono nulli.

— 0 — 0 —

Operativamente Se voglio sol. gen. di un' eq. diff. l'u. omog. in forma normale, basta trovare una base

Nel caso in cui i coeff. sono costanti, c'è un algoritmo per trovare UNA base

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = 0$$

WLOG posso supporre $a_k = 1$

Caso $k=1$

$$\ddot{u} + a_0 u = 0$$

$$u(t) = \underbrace{c}_{\text{param.}} \cdot \underbrace{e^{-a_0 t}}_{\text{unico el. della base}}$$

Caso $k=2$

$$\ddot{u} + a \dot{u} + b u = 0$$

Si considera il polinomio caratteristico $x^2 + ax + b = 0$

A seconda delle radici si aprono 3 scenari.

Due radici reali distinte λ e μ Una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$
quindi la sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

Dim Basta sostituire! $u(t) = e^{\lambda t}, \dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\ddot{u} + a \dot{u} + b u = e^{\lambda t} (\lambda^2 + a \lambda + b) = 0$$

Due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$

Una base è $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

Dim Basta sostituire anche qui!

Euristica: seguendo la logica del caso precedente, una soluzione sarebbe stata

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Due radici reali coincidenti Radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 2

Una base è $e^{\lambda t}$ $t e^{\lambda t}$

Dim Basta sostituire! [Fatto per esercizio]

Euristica: quando sono reali e distinte una base è $e^{\lambda t}$, $e^{\mu t}$.

Un'altra base è

$$e^{\lambda t} \quad \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}$$

Ora il secondo è $e^{\lambda t} \underbrace{\frac{e^{(\mu-\lambda)t} - 1}{\mu - \lambda}}_{\substack{\downarrow \\ t \text{ quando } \mu \rightarrow \lambda}}$

— o — o —

Lo stesso algoritmo funziona per eq. di ordine k . Si passa al polinomio caratteristico, il quale ha k radici con molteplicità.

Queste producono k el. della base

- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. 1 $\rightsquigarrow e^{\lambda t}$
- ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 $\rightsquigarrow e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. m $\rightsquigarrow e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, ..., $t^{m-1} e^{\lambda t}$
- ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di molt. m $\rightsquigarrow$ soliti due elementi e gli stessi molt. per $t, \dots, t^{m-1}$

— o — o —