

$$u' = f(t) g(u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

Teorema decente 1 Supponiamo  $f$  e  $g$  continue e  $g(u_0) \neq 0$

Allora quella data dalla procedura è l'unica soluzione possibile

Oss. 1 Non ci sono ipotesi di Lip., ma l'eq. è speciale e sto assumendo  $g(u_0) \neq 0$ .

Oss. 2 Se  $g(u_0) = 0$ , allora  $u(t) \equiv u_0$  è di sicuro soluzione e potrebbe essere non unica (vedi pennello di Peano)

Dim Supponiamo  $f: [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$  continua ( $\delta_0 > 0$ )  
 Supponiamo  $g: [u_0 - r, u_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$  continua ( $r > 0$ )  
 Supponiamo  $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$   
 e soluzione dell'equazione per ogni  $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$   
 ( $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ ).

Osservo che  $g(u(t)) \neq 0$  per  $t = t_0$  (per ipotesi)

Quindi, a meno di prendere un  $\delta_1$  più piccolo posso supporre

$$g(u(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1].$$

Dall'eq. sappiamo che

$$u'(t) = f(t) \cdot g(u(t)) \quad \forall t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$$

Dividendo

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t) \quad "$$

Per ogni  $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$  posso integrare su  $[t_0, t]$

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

$$\Gamma(u(t)) - \Gamma(\underbrace{u(t_0)}_{u_0})$$

$$F(t) - F(t_0)$$

dove  $F$  è una primitiva di  $f$

dove  $\Gamma$  è una primitiva di  $\frac{1}{g}$

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \text{pongo } y = u(s) \text{ no } dy = u'(s) ds$$

$$s = t_0 \rightsquigarrow y = u(t_0)$$

$$s = t \rightsquigarrow y = u(t)$$

$$= \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{dy}{g(y)} = \Gamma(u(t)) - \Gamma(u(t_0))$$

$$\text{Conclusione: } \Gamma(u(t)) = F(t) + \underbrace{\Gamma(u_0) - F(t_0)}_{"C"}$$

Questo è il risultato che si otteneva con la procedura!  
— o — o —

Oss. Quello che abbiamo davvero di più è questo:

se c'è una soluzione, allora è quella data dalla procedura (e quindi unica) finché  $g(u(t)) \neq 0$ .

Dopo non c'è certezza (Peano docet).

Teorema debole 2 Stesse ipotesi di prima, compreso  $g(u_0) \neq 0$ .

Allora quella data dalla procedura è davvero una soluzione.

(quindi teorema di esistenza)

Dim Sia  $F$  una primitiva di  $f$

Sia  $\Gamma$  una primitiva di  $\frac{1}{g}$  (definita dove  $g \neq 0$ )

Pongo

$$u(t) = \Gamma^{-1} ( F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0) )$$

Dando per buona l'esistenza di  $\Gamma^{-1}$ , che proprietà ha la funzione  $u(t)$ ?

$$u(t_0) = \Gamma^{-1}(\Gamma(u_0)) = u_0 \quad \text{c}$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{F'(t)}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)))} \\ &= f(t) \cdot g(\Gamma^{-1}(F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0))) \\ &= f(t) \cdot g(u(t)) \quad \text{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\Gamma^{-1}(x)) &= x \\ \Gamma'(\Gamma^{-1}(x))[\Gamma^{-1}]'(x) &= 1 \\ [\Gamma^{-1}]'(x) &= \frac{1}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(x))} \end{aligned}$$

Perché è invertibile  $\Gamma$ ? È la primitiva di  $\frac{1}{g}$ , che è  $\neq 0$  (quindi sempre  $> 0$  o sempre  $< 0$ ) in tutto un intorno di  $u_0$ , quindi strett. monotona.

Conseguenza: pur di scegliere bene partenza ed arrivo,  $\Gamma$  è invertibile.

Ora l'argomento  $F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)$  sta nella zona di invertibilità quando  $t = t_0$ , quindi anche per  $t$  vicini a  $t_0$ .

Qui si decide il LIFE SPAN.

— 0 — 0 —

Esempio 1  $u' = u^3 \sin t \quad u(0) = \alpha$

Domanda: per quali  $\alpha$  ho esistenza globale?

$$\frac{du}{dt} = u^3 \sin t \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^3} = \sin t \, dt$$

$$\int \frac{du}{u^3} = \int \sin t \, dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\cos t + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u^2} = 2\cos t + c$$

$$u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{c + 2\cos t}}$$

Trovo c in funzione di  $\alpha$ :  $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{c+2}}$

$$\alpha^2 = \frac{1}{c+2} \leadsto c = \frac{1}{\alpha^2} - 2$$

$$u(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2+2\alpha^2\cos t}}$$

Verifica! (Funziona anche per  $\alpha=0$ )

Per quali  $\alpha$  c'è esistenza globale? Deve succedere

$$1-2\alpha^2+2\alpha^2\cos t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora

$$1-2\alpha^2+2\alpha^2\cos t \geq 1-4\alpha^2 \text{ e questo è } > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$$

EFFETTO SOGLIA: sotto la soglia esistenza globale  
sopra blow up

