

EQUAZ. DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$\dot{u} = f(t)g(u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

↑ ↑
numeri dati

Si può trovare "la" soluzione con questa procedura

- ① Separare
 - ② Integrare
 - ③ Ricavare
 - ④ Determinare c usando la cond. iniz. $\leadsto$ sol. p.bm. Cauchy
 - ⑤ Verifica!
 - ⑥ Studiare la soluzione
- } soluz. gen. con un parametro libero c

Esempio 1 $\dot{u} = t \cdot u^2$ $u(0) = 5$

- ① Separare : tutte le u a sx, tutte le t a destra

$$\frac{du}{dt} = t \cdot u^2 \quad \leadsto \quad \frac{du}{u^2} = t \cdot dt$$

- ② Integrare : a sx risp. a u , a dx risp. a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t dt \quad \leadsto \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2} t^2 + c$$

- ③ Ricavare : ricavo u in funzione di t

$$\frac{1}{u} = c - \frac{1}{2} t^2 \quad \leadsto \quad u = \frac{1}{c - \frac{1}{2} t^2} \quad \leadsto \quad u = \frac{2}{c - t^2}$$

$$u(t) = \frac{2}{c - t^2}$$

Sol. generale dell'equazione

④ Ricavo c $5 = u(0) = \frac{2}{c} \rightsquigarrow c = \frac{2}{5}$

$$u(t) = \frac{2}{\frac{2}{5} - t^2}$$

$\rightsquigarrow$

$$u(t) = \frac{10}{2 - 5t^2}$$

⑤ Verifico (eq. e dato iniziale) $t = 0 \rightsquigarrow u(0) = 5 \quad \checkmark$

$$u'(t) = -\frac{10}{(2-5t^2)^2} (-10t) = \frac{100}{(2-5t^2)^2} \cdot t = u(t)^2 \cdot t \quad \checkmark$$

⑥ Studio la soluzione

Cosa interessa: $\rightarrow$ intervallo massimale di esistenza

$\rightarrow$ LIFE SPAN (tempo di vita, nel futuro e nel passato)

$\rightarrow$ tipo di morte

Def. Si dice int. max di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale

Si dice LIFE SPAN nel futuro il sup dell'int. max esistenza
passato l'inf ...

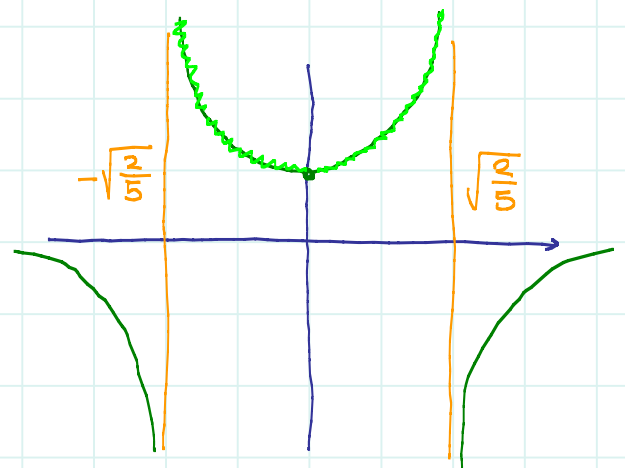
Nell'esempio: $u(t) = \frac{10}{2-5t^2}$, definita per $t \neq \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\frac{-\sqrt{\frac{2}{5}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{2}{5}}}{\text{-----}}$$

$\uparrow$ tempo iniziale

Int. max esistenza: $(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$

LIFE SPAN nel futuro: $\sqrt{\frac{2}{5}}$



Nel futuro ci sono 3 possibilità. Sia T il L.S. nel futuro

→ $T = +\infty$ (esistenza globale nel futuro)

→ BLOW UP : $T < +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty \quad \left[\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty \right]$$

→ BREAK DOWN (rottura) $T < +\infty$ e $u(t)$ esce dalla zona in cui il RHS dell'equazione ha senso.

Spesso (ma non sempre) questo si traduce in

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

Nel vostro caso : la soluzione ha blow up per $T = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Esempio 1-bis $\ddot{u} = u^2 t$ $u(0) = 0$

Alla fine del ③ mi ritrovo $u(t) = \frac{2}{c - t^2}$

④ Ricavo c : $0 = \frac{2}{c}$ ☹️

In questo la soluzione è banalmente $u(t) \equiv 0$, con esistenza globale nel passato e nel futuro.

Esempio 2 $\ddot{u} = -\frac{t^2}{u}$ $u(0) = 5$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{t^2}{u}$ $\rightsquigarrow$ $u du = -t^2 dt$

② $\int u du = -\int t^2 dt$ $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{2} u^2 = -\frac{1}{3} t^3 + c$

③ $u^2 = -\frac{2}{3} t^3 + c$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} t^3 + c}$

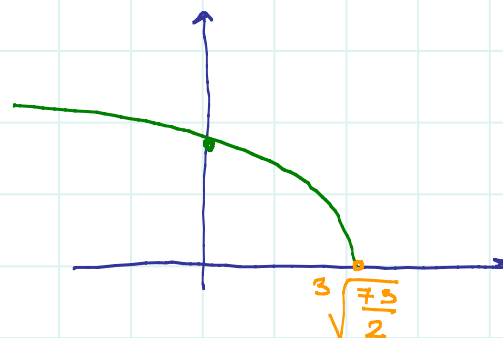
④ Assumo $u(0) = 5$, scelgo segno +

$$5 = \sqrt{c} \leadsto c = 25 \leadsto u(t) = \sqrt{25 - \frac{2}{3}t^3} \quad \text{Soluzione.}$$

⑤ Verifica: $u(0) = 5 \quad \checkmark \quad \text{Eq. ok (fare conto)}$

⑥ Studio: definita quando $25 - \frac{2}{3}t^3 \geq 0$, cioè $t^3 \leq \frac{75}{2}$,

cioè per $t \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{75}{2}}\right)$ ← LIFE SPAN
int. massima
di esistenza



Nel passato c'è esistenza globale

Nel futuro c'è break down in $t = \sqrt[3]{\dots}$

Nota bene: $u(t)$ esce dalla zona in cui RHS ha senso e

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = -\infty$$

Esempio 3 $\ddot{u} = \frac{u}{t} \quad u(1) = 5$

La soluzione è $u(t) = 5t$ (verifica diretta)

Int. massima di esistenza: $(0, +\infty)$ ($t=0$ non è ammesso)

Nota bene: anche $u(t) = \begin{cases} 5t & \text{per } t \geq 0 \\ 7t & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$

è soluzione...

Esempio 4

$$\dot{u} = 5u$$

$$u(0) = 8$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{du}{dt} = 5u \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du}{u} = 5 dt$$

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{du}{u} = \int 5 dt \quad \rightsquigarrow \quad \log |u| = 5t + c$$

$$\textcircled{3} \quad |u| = e^{5t+c} = e^c \cdot e^{5t} \quad \rightsquigarrow \quad u(t) = \pm e^c \cdot e^{5t}$$

$$u(t) = k \cdot e^{5t}$$

$\uparrow$
k generico, anche nullo

Back to esempio 1

$$\dot{u} = u^2 t$$

$$u(0) = 5$$

$\rightsquigarrow$ blow up in $t = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\dot{u} = u^2 t \quad u(0) = 8$$

Se visse di più, la incontrerebbe,
producendo una violazione di unicità

— 0 — 0 —

