

Esempio 1 $\ddot{u} = u$

UNA soluzione è $u(t) = e^t$

Essendo autonoma, anche $u(t) = e^{t+c} = e^c \cdot e^t$ è soluzione

Essendo lineare e omogenea, anche $u(t) = c \cdot e^t$ è soluzione

↑
segno qualunque

Si può dimostrare che queste sono TUTTE le soluzioni.

Esempio 1 bis $\ddot{u} = \mp u$

Si può dim. che tutte le sol. sono $u(t) = c \cdot e^{\mp t}$

↑
costante arbitraria

Esempio 2 $\ddot{u} + u = 0$ $\ddot{u} = -u$

$u(t) = \sin t$ e $u(t) = \cos t$ sono soluzioni

Essendo lin. e omog. anche

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$

↑ ↑
due param. liberi

è sol., e sono tutte (si può dim.)

Esempio 3 $\ddot{u} = -u^2$

Una sol. è $u(t) = \frac{1}{t}$ Un'altra soluz. è $u(t) \equiv 0$

Altre soluzioni sono $u(t) = \frac{1}{t+c}$ (autonoma!)

Sono tutte.

↑
param. libero

PROBLEMA DI CAUCHY

Eq. diff. di ordine k + k condizioni iniziali che prescrivono il valore di u e delle sue prime $k-1$ derivate per uno stesso valore di t

Esempi $\ddot{u} = u$ $u(7) = 25$

$$\ddot{u} + u = 0$$

$$u(7) = 25$$

$$\ddot{u}(7) = 34$$

(7 deve essere lo stesso sopra e sotto)

$$\ddot{u} + 5u = 0$$

$$u(7) = 25$$

$$u(8) = 25$$

↑
NO PROBLEMA DI CAUCHY

$$\ddot{u} + 5u = 0$$

$$u(7) = 25$$

$$\ddot{u}(7) = 34$$

↑
No pbm. di Cauchy

Idea generale: un'eq. di ordine k ha infinite soluzioni che dipendono da k parametri.

Quando impongo le cond. iniz. spero di trovare in modo univoco i valori dei parametri

Esempi $\ddot{u} = 3u$ $u(0) = 5$

La sol. gen. è $u(t) = c e^{3t}$

$$u(0) = 5 \Rightarrow c = 5$$

Quindi $u(t) = 5e^{3t}$ è la sol. del pb. di Cauchy.

Teo. misterioso 1

↑
Teo. sola
esistenza

Consideriamo il pbm. di Cauchy per
un'eq. di ordine k in FORMA NORMALE.

Supponiamo che il RHS sia decente (funzione
continua).

Allora esiste almeno una soluzione

Teo. misterioso 2

↑
Teo. esistenza e
unicità

Stesse ipotesi di sopra.

Supponiamo che il RHS sia ancora meglio.

Allora la sol. è unica

ad esempio
derivabile

Precisazione Caso di ordine 1

$$u' = F(t, u)$$

L'ipotesi ancora meglio (detta male) è

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\forall t \quad \forall u_1 \quad \forall u_2}_{\text{non sto dicendo dove}} \quad |F(t, u_2) - F(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1|$$

(Lip. rispetto ad u unif. rispetto a t , cioè lo stesso L va
bene per ogni t)

Esempio 1 È importante il problema di Cauchy!

$$u'' + u = 0 \quad u(0) = 0 \quad u(\pi) = 27$$

La sol. generale è $u(t) = a \sin t + b \cos t$

Se impongo $u(0) = 0$ resta $u(t) = a \sin t$ (viene $b = 0$)

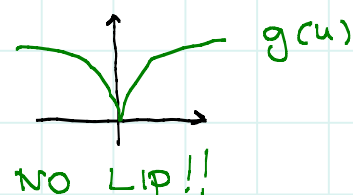
e allora $u(\pi) = 27$ diventa impossibile :)

Se la seconda condizione era $u(\pi) = 0$, le sol. erano ∞ .

Esempio 2 (PENNELLO DI PEANO)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 3 |u(t)|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

N.B. $g(u) = 3|u|^{\frac{2}{3}}$



Teo. esistenza $\Rightarrow$ almeno una soluzione c'è :
ad esempio $u(t) \equiv 0$

Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$ (basta sostituire !!!)

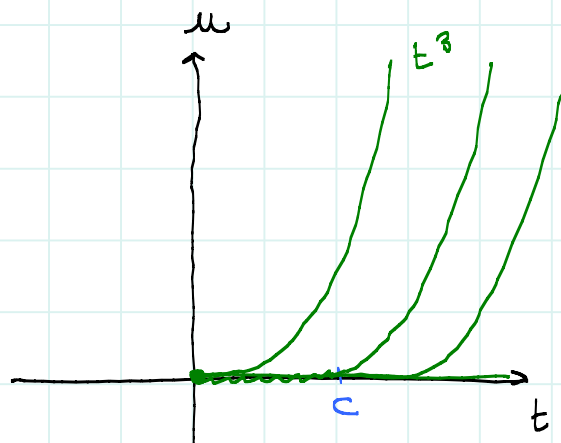
Quindi il pbm. di Cauchy ha ALMENO due sol. diverse

Le soluzioni sono in realtà INFINITE!!!

Un'altra soluzione è

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

(basta sostituire!!)



Fenomeno alla PEANO : quando ho non unicità c'è sempre
 $\rightarrow$ una sol. più piccola
 $\rightarrow$ una sol. più grande
 $\rightarrow$ per ogni p.to tra le 2 c'è una soluzione che ci passa

Esercizio Vedere cosa succede con

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1-u^2} \quad \leftarrow \text{NON LIP.} \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

— o — o —