

Secondo semestre :

→ eq. differenziali

→ succ. per ricorrenza

→ liminf / limsup

→ compattezza vs completezza

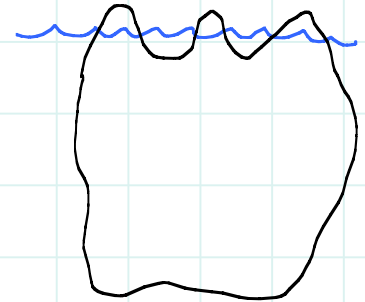
→ moduli di continuità

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Incognita è una funzione

$f(x)$ $f(t)$ $x(t)$ $u(t)$ $u(x)$

↑ ↑



Tra le incognite c'è anche l'insieme di definizione

$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

↑ ↑ ↑

incognito fisso

L'equazione si presenta come un'uguaglianza che coinvolge la t , la funzione u e un po' di sue derivate.

Esempi

$$u'(t) = u(t)$$

$$u'(t) = u(t) - t^2$$

$$u''(t) + t[u'(t)]^2 + u(t) = 0$$

$$u' = u$$

$$u' = u - t^2$$

$$u'' + t(u')^2 + u = 0$$

Spesso $u' \rightsquigarrow \dot{u}$

$u'' \rightsquigarrow \ddot{u}$

Quando sale $u^{(15)}$

↑
Notazione rapida: non
metto le t che sono
argomento della u

Risolvere l'eq. vuol dire trovare $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa l'uguaglianza per ogni $t \in [a, b]$.

Def. Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare

$$\ddot{u} = u^2 + \sin t \quad \rightsquigarrow \text{ordine 1}$$

$$\ddot{u} = u^2 + \cos t \quad \rightsquigarrow \text{ordine 2}$$

Def. Un'eq. diff. si dice AUTONOMA se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate (quindi in notazione rapida le t non ci sono proprio)

$$\underline{\ddot{u}(t) = u(t)^2}$$

autonoma

$$\ddot{u}(t) = u(t)^2 \cdot t$$

↑↑
NON AUTONOMA

Def. Un'eq. diff. si dice IN FORMA NORMALE se la derivata di ordine max. è stata "ricavata" rispetto al resto.

Più formalmente

$$\Phi(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{Eq. diff. generale}$$

$$u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \quad \rightsquigarrow \text{in forma normale}$$

Esempi

$$u'' = u^2 - t^2 \quad \text{SI FORMA NORMALE}$$

$$\ddot{u} - 3u = \sin t \quad \text{QUASI FORMA NORM}$$

$$\rightsquigarrow \ddot{u} = 3u + \sin t$$

$$t \ddot{u} = 3u \quad \text{NI FORMA NORMALE}$$

$$\rightsquigarrow \ddot{u} = \frac{3}{t} u \quad (\text{equivalente solo se } t \neq 0)$$

$$\ddot{u}^3 = 3u \quad \text{QUASI} \quad \rightsquigarrow \ddot{u} = \sqrt[3]{3u}$$

$$\ddot{u}^{30} = 3u \quad \text{PROPRIO NO! non si riesce a ricavare } \ddot{u}$$

1ª ISOLA

Eq. diff. 1° ordine a

VARIABILI SEPARABILI

Sono eq. del tipo

$$u'(t) = f(t) \cdot g(u(t))$$

$$\dot{u} = f(t) \cdot g(u)$$

Eq. di ordine 1 in forma normale in cui il RHS è prodotto di una funzione della sola t per una della sola u .

Oss. Primo ordine + forma norm. + autonoma
 $\Rightarrow$ variabili separabili

$$\dot{u} = g(u) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(t) \cdot u}}{t \cdot g(u)}$$

Eq. diff. lineari

Sono eq. del tipo

$$\sum_{i=0}^k \underbrace{a_i(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{coeff.}}} u^{(i)}(t) = \underbrace{f(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{termine forzante}}}$$

I coeff. sono funzioni date definite su un intervallo $[a, b]$ comune
La $f(t)$ idem

L'eq. si dice OMOGENEA se $f(t) \equiv 0$ e NON OMOG. altrimenti

Oss. Si può portare in forma normale pur di poter dividere per $a_k(t)$, che deve essere $\neq 0$.

Esempi

$$\underbrace{t^2}_{\substack{\uparrow \\ a_1(t)}} u' + \underbrace{\sin t}_{\substack{\uparrow \\ a_0(t)}} \cdot u = \underbrace{\log t}_{f(t)}$$

$$u' + t u^2 = 1$$

$\nwarrow$ colpevole della non linearità

Oss. Possiamo pensare al LHS come un'appl. lineare

$$L: C^k([a,b]) \rightarrow C^0([a,b])$$

Risolvere l'eq. omogenea vuol dire trovare il ker di L.

2^a isola Eq. diff. lineari di ordine qualunque
a COEFFICIENTI COSTANTI omogenee e non omog.

Esempi

$$u' + 7u = \cos t$$
$$3u'' + 5u' - 6u = t^2$$

(il LHS è comb. lin. di u e delle sue derivate con coeff. costanti')

3^a isola Eq. diff. lineari di ordine 1 generali che si possono
mettere in forma normale

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \qquad u' + a(t)u = b(t)$$

Esempi

$$u' = tu \quad \rightarrow \text{variabili separabili}$$
$$\quad \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ isola}$$

$$u' = u + t \quad \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ isola}$$

$$\rightarrow 3^{\text{a}} \text{ isola}$$

$$\frac{u' - u}{Lu} = \frac{t}{\uparrow f(t)}$$

$$a(t) = -1$$

$$b(t) = t$$

Prop. Se $u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è sol. di un'eq. diff. autonoma,
allora anche le sue traslate temporali $u(t+c)$ sono
soluzioni della stessa equazione.

Esempio / dim

$$u'(t) = [u(t)]^2$$

$$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Pongo

$$v(t) = u(t+2026)$$

$$v: [a-2026, b-2026] \rightarrow \mathbb{R}$$

Allora

$$v'(t) = \underbrace{u'}_{\circ}(\underbrace{t+2026}_{\circ}) = [u(t+2026)]^2 = [v(t)]^2$$