

Esercizio 1

$$\sum_{k=m^2}^{m^3} k^7$$

ordine di infinito e parte principale

Brutal mode: $\sim \int_{m^2}^{m^3} x^7 dx = \left[\frac{1}{8} x^8 \right]_{m^2}^{m^3} \sim \frac{1}{8} m^{24}$

Rigorous: confronto con l'integrale

Per $f(x)$ crescente vale che

$$\sum_{k=A}^B f(k) \leq \int_A^{B+1} f(x) dx$$

$$\sum_{k=A}^B f(k) \geq \int_{A-1}^B f(x) dx$$

↑
area mancanti traslate
a sx di 1

Esercizio 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Quanti termini sommare per avere un errore $\leq \frac{1}{100}$ (fare stima)

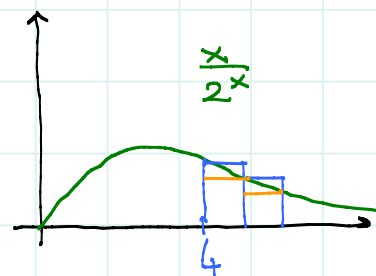
Devo imporre

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \frac{1}{100}$$

Studiando la funzione si vede che prima cresce e poi decresce

$$k=3 \sim \frac{3}{8}$$

$$k=4 \sim \frac{1}{4} < \frac{3}{8} \Rightarrow \text{da } 4 \text{ in poi già decresce}$$



Per la solita disug.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \leq \int_n^{+\infty} x 2^{-x} dx$$

e quest'ultimo si calcola per parti e quindi si riesce a stimare n

$$\int x 2^{-x} dx = -x 2^{-x} \frac{1}{\log_2} + \int 2^{-x} \frac{1}{\log_2} dx$$

$$= -x 2^{-x} \frac{1}{\log_2} - \frac{1}{(\log_2)^2} 2^{-x}$$

Ora lo calcolo tra n e $+\infty$ e impongo che sia $< \frac{1}{100}$

Esempio 3 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

Dipende da n . Per $n=0$ viene $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = +1$

Chiamiamolo I_n . Allora

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \underset{G}{x^{n+1}} \underset{F}{e^{-x}} dx = \left[\underset{G}{-x^{n+1}} \underset{F}{e^{-x}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1) x^n e^{-x} dx$$

$$= (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = (n+1) I_n \quad \therefore$$

Quindi $I_n = n!$

Oss. Posso porre $I(x) := \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

Questa è definita per ogni $x > -1$ (questo garantisce la convergenza per il p.b.m. in $t=0$)

Calcolare $I(-\frac{1}{2})$

$$I(-\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \xrightarrow[\substack{\sqrt{t}=y \\ t=y^2 \\ dt=2y dy}]{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-y^2} \cdot 2y dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Oss. Un giorno sarà $I(x) = \Gamma(x+1)$ (Γ di Eulero)

Esempio 4

$$f(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$$

↑
voglio evitare
pbm in $t=1$

Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Viene $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log t} dt$

e questo diverge ad esempio per confronto asint. con $\frac{1}{t}$ ($\circ \frac{1}{\sqrt{t}}$)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\log t} = +\infty \quad \text{quindi} \quad \frac{t}{\log t} \geq 1 \quad \text{per } t \text{ grandi}$$
$$\text{quindi} \quad \frac{1}{\log t} \geq \frac{1}{t} \quad \text{per } t \text{ grandi}$$

Il limite è $+\infty$. Ma quanto cresce? Cresce come $\frac{x}{\log x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{\log x}} \stackrel{\text{H\^op}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{\log x - 1}{\log^2 x}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \frac{\log^2 x}{\log x - 1} = 1 \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 5 Come cresce $\int_0^x e^{t^2} dt$?

Provo con $\frac{e^{x^2}}{2x} = g(x)$ [La primitiva cresce meno della funzione!]

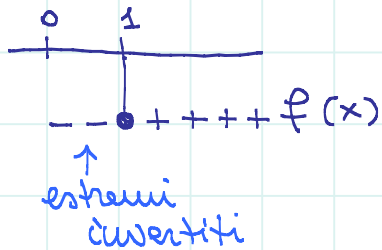
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2x^2}} = 1 \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 6 $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$

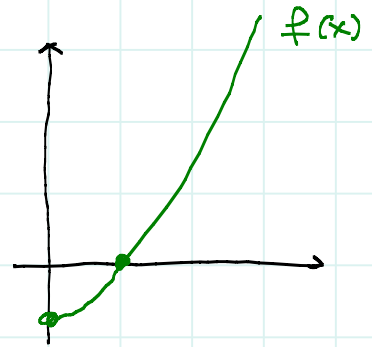
Per quali x è definita? Per $x \geq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$
che converge $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$

Seguo?



Monotonia? $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow$ strett. crescente



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (l'integrale si diverge)

Quanto cresce a $+\infty$? Provo con $\sqrt{x} e^x = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2\sqrt{x}}{1+2x} = 0, \text{ quindi non è quello giusto}$$

Secondo tentativo $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \dots$ con questo dovrebbe venire

— 0 — 0 —