

Integrabilità del prodotto

Ipotesi : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile

$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile

Tesi : prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è integrabile

Dim Per il criterio di integrabilità, per ogni $\varepsilon > 0$ devo trovare step functions φ e ψ b.c.

$$\varphi(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \psi(x)$$

e

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

Problema date step funct. analoghe per f e g , come produrre quelle per $f \cdot g$?

Scenario buono : $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ sempre. In questo caso posso supporre che le s.f. per f e g siano ≥ 0 .

Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esistono

$$0 \leq \varphi_f(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x)$$

$$0 \leq \varphi_g(x) \leq g(x) \leq \psi_g(x)$$

tali che

$$\int_a^b (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}, \quad \int_a^b (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2M_f}$$

Allora tutanto

$$\varphi_f(x) \varphi_g(x) \leq f(x) g(x) \leq \psi_f(x) \psi_g(x)$$

(qui è fondamentale che sia roba ≥ 0)

$$\int (\psi_f(x) \psi_g(x) - \varphi_f(x) \varphi_g(x)) dx$$

$$= \int \underbrace{\psi_f(x)}_{\leq M_f} (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx + \int \underbrace{\varphi_g(x)}_{\leq M_g} (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx$$

↖ bound per f e g ↗

$$\leq M_f \int (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx + M_g \int (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M_f} \qquad \qquad \qquad \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

[Bisogna osservare che i casi $M_f = 0$ oppure $M_g = 0$ sono banali]

Scenario semi-buono: f e g hanno segno costante
(eventualmente diverso) in $[a, b]$
[Basta tirare fuori i segni -]

Scenario generale: Scriviamo

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x)$$

con $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e idem per g_+ e g_-

$$f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

Osserviamo che

→ f_+, f_-, g_+, g_- sono integrabili (max/min di funz. int.)

→ $f \cdot g = f_+ g_+ + f_+ g_- + f_- g_+ + f_- g_-$ è somma di quattro funz. integrabili.

Possibile scorciatoia dopo lo scenario buono:

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$$

f int. $\Rightarrow |f|$ int $\Rightarrow f^2 = |f|^2$ è int. perché prodotto di due funz. ≥ 0

Idea per g^2 e $(f+g)^2$ integrabili. Ma allora

$$fg = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

è somma / diff. di funzioni integr.

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ è indeterminato

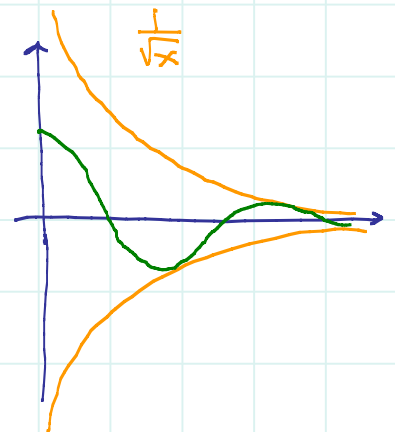
$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2 \cos(\sqrt{x})]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2 \cos(\sqrt{A}) + 2] \end{aligned}$$

Questo limite non esiste: basta considerare le due succ.

$$A_m = (2m\pi)^2$$

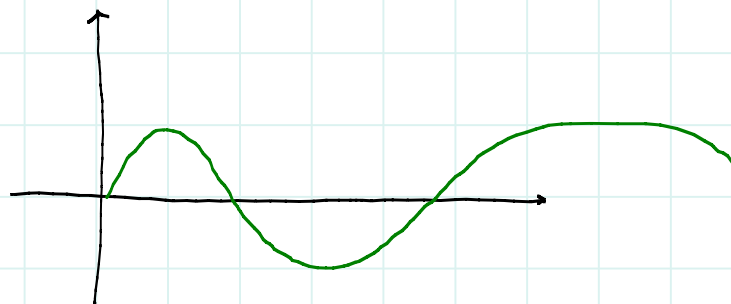
$$B_m = (2m\pi + \pi)^2$$

Graficamente: le oscillazioni sono sempre più lunghe e le aree sotto non tendono a zero



Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) dx$

L'idea è che sia parecchio indeterminato



Anche qui si fa la primitiva

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) dx &= \int 2y \sin y dy = -2y \cos y + 2 \int \cos y dy \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ y = \sqrt{x} \\ x = y^2 \\ dx = 2y dy \end{array} \\ &= -2y \cos y + 2 \sin y \\ &= -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Verifica: $[-2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin \sqrt{x}]'$

$$= -2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2\sqrt{A} \cos(\sqrt{A}) + 2 \sin(\sqrt{A})] = \text{non esiste}$$

Se prendo $A_m = (2\pi m)^2$ tende a $-\infty$

$B_m = (2\pi m + \pi)^2$ tende a $+\infty$

Domanda: di che ordine sono le aree sotto le varie "colline"?

Si stimano con rettangoli / triangoli con altezza 1 e basi

$$(2\pi m + \pi)^2 - (2\pi m)^2 \sim 4\pi^2 m$$

Esempio 4 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x) dx$

Due problemi: $+\infty$ e $-\infty$

$$\int_{-\infty}^0 \sin(e^x) dx \text{ converge per confronto asintotico con } e^x$$

≥ 0 per $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

e $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ converge (volendo usando la defn.)

$\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx$ dovrebbe convergere per via delle oscillazioni forti

$$\sin(e^x) = \underbrace{e^x \sin(e^x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{la primitiva} \\ -\cos(e^x) \text{ è} \\ \text{limitata}}} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\substack{\uparrow \text{decrescente} \\ \text{e tende a } 0}} \rightsquigarrow \text{DIRICHLET}$$

Esempio 5 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(e^x) dx$ diverge a $+\infty$

A $+\infty$ converge per Dirichlet

A $-\infty$ la funzione tende a 1, quindi diverge a $+\infty$

Esempio 6 $\int_{-\infty}^0 |\sin(e^x)| dx$
è quello di prima
:)

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} |\sin(e^x)| dx \\ & \underbrace{\hspace{10em}} \\ & \text{Diverge a } +\infty \text{ e} \\ & \text{si dimostra con i} \\ & \text{rettangolini / triangolini} \\ & \text{Le basi sono} \\ & \sim \log(n+1) - \log n \\ & = \log \frac{n+1}{n} \\ & = \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n} \end{aligned}$$

— o — o —