

STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

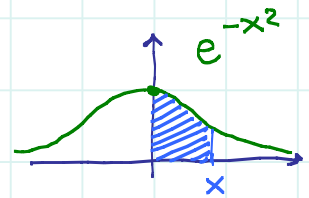
Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Simmetrie: $f(x)$ è DISPARI perché l'integranda è pari

Definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Zeri e segno: $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \text{numero} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



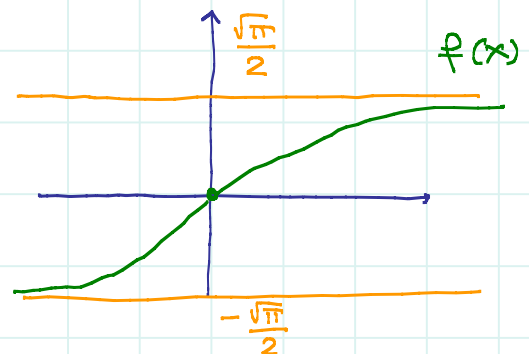
Monotonia: $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ci aspettiamo che sia

→ concava per $x \geq 0$

→ convessa per $x \leq 0$

$$f''(x) = -2x e^{-x^2} \text{ conferma}$$



Esercizio 2 Risolvere la disequazione $\arctan x > \int_0^x e^{-x^2} dx$
(per x grande è verificata perché $\frac{\pi}{2} > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Studio della funzione $\varphi(x) := \arctan x - \int_0^x e^{-x^2} dx$

Dispari, definita e continua in $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$.

Sarà monotona?

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}$$

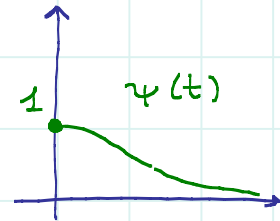
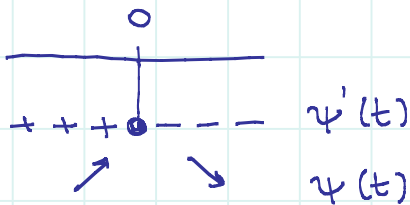
Ci piacerebbe che fosse $\varphi'(x) \geq 0$. Osservo che

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x^2)e^{-x^2} \leq 1$$

Studio $\psi(t) := (1+t)e^{-t}$

$$\psi'(t) = e^{-t} - e^{-t}(1+t) = -te^{-t}$$

$$\psi(0) = 1$$



Abbiamo dimostrato che $\psi(t) \leq 1 \quad \forall t \geq 0$ con ugual. $\Leftrightarrow t=0$

Quindi, ponendo $t = x^2$, abbiamo che

$$(1+x^2)e^{-x^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con ugual.} \Leftrightarrow x=0$$

Quindi $\varphi'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con ugual. $\Leftrightarrow x=0$

Monotonia 3 $\Rightarrow \varphi$ strett. cresc. $\Rightarrow \varphi(x) > 0$ per ogni $x > 0$

$$\varphi(x) < 0 \quad " \quad x < 0.$$

Quindi la disug. iniziale ha come sol. $x > 0$.

Esercizio 3 Studiare $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ (Due estremi "strani")

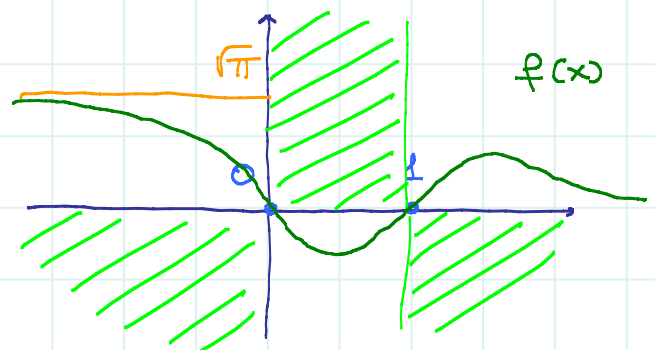
Continua e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Niente simmetrie.

Dove si annulla? Essendo l'integranda > 0 , può annullarsi solo quando gli estremi coincidono, cioè

$$x = x^2 \rightsquigarrow x = 0, 1$$

Per lo stesso motivo

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{coda di integrale convergente})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Continua + limiti finiti a $\pm\infty \Rightarrow$ funzione limitata

In questo caso sappiamo anche che $f(x) < \sqrt{\pi} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ per questioni di integrali.

Chi è $f'(x)$?

Fatto generale :
$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t) dt$$

$$\leadsto f'(x) = \varphi(b(x)) b'(x) - \varphi(a(x)) a'(x)$$

Dim Detta Φ una primitiva di φ , abbiamo che

$$f(x) = \Phi(b(x)) - \Phi(a(x))$$

quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Phi'(b(x)) b'(x) - \Phi'(a(x)) a'(x) \\ &= \underbrace{\varphi(b(x))}_{\text{---}} \underbrace{b'(x)}_{\text{---}} - \underbrace{\varphi(a(x))}_{\text{---}} \underbrace{a'(x)}_{\text{---}} \end{aligned}$$

Nel nostro caso
$$f'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x - e^{-x^2} \cdot 1$$

$$= e^{-x^2} \left(2x e^{x^2-x^4} - 1 \right)$$

il segno dipende da questo
e studiando questa funzione
forse si vede che si annulla 2 volte

$f(x)$ è Lipschitziana? Sì, anche su tutto $\mathbb{R}$.

Basta osservare che la derivata è limitata e lo è perché è continua e ha limiti finiti per $x \rightarrow \pm\infty$

[Provare a dim. per bene questo fatto]

Esercizio 4 Sia f quella dell'esercizio 3.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{x^2}$$

1° modo: L'Hôpital essendo $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + \cos x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{-x^4} - e^{-x^2} + \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1 + x^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x} = 1 \end{aligned}$$

2° modo Chi è il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$?
" 5 di $f(x)$?

Brutal mode: $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$

$$\begin{aligned} &= \int_x^{x^2} \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^5)\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{t^5}{10} \right]_x^{x^2} + [o(t^6)]_x^{x^2} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

pol. di Taylor di $f(x)$ di grado 5

L'unico passaggio brutale è

$$\varphi(t) = o(t^a) \text{ per } t \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi(t) = o(t^{a+1}) \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{(a+1)t^a} = 0$$

Achtung! Per le derivate NON FUNZIONA

$$f(x) = x^{11} \sin \frac{1}{x^{100}} \quad . \quad \text{Allora } f(x) = o(x^{10}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{Ma } f'(x) = \underbrace{11 \cdot x^{10} \sin \frac{1}{x^{100}}}_{o(x^9)} - \underbrace{x^{11} \cos \frac{1}{x^{100}} \cdot (100) \frac{1}{x^{101}}}_{\substack{\text{c'è } x^{90} \text{ al denominatore} \\ \Rightarrow \text{terribile}}}$$

— 0 — 0 —