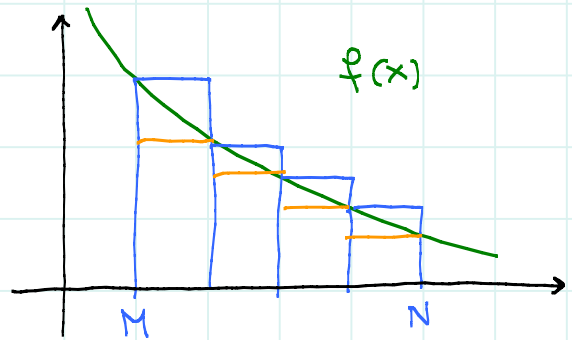


CONFRONTI SERIE - INTEGRALI

(Gli integrali aiutano le serie)

Ipotesi: $M \in \mathbb{N}$

$$f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

 f debolm. decrescente

Allora per ogni $N > M$ intero
valgono le disuguaglianze

$$\sum_{k=M+1}^N f(k) \leq \int_M^N f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{N-1} f(k)$$

Geometricamente è: aree blu $\leq$ integrale $\leq$ aree arancioni

Dim. Andrebbe fatta per induzione su N con passo base $N = M+1$.
Al passo induttivo si usa che

$$f(N+1) \leq \int_N^{N+1} f(x) dx \leq f(N)$$

per la monotonia di $f(x)$.

— o — o —

Facendo il limite per $N \rightarrow +\infty$ otteniamo che

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{+\infty} f(k)$$

Oss. Essendo $f(x)$ monotona, definitivamente ha segno costante, quindi i limiti esistono in $\overline{\mathbb{R}}$.

La cosa è più interessante quando $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ così c'è la cond. nec. per le serie

Corollario Nelle ipotesi di sopra, quindi $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ debolm. decr., vale che

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=M}^{+\infty} f(k) \text{ converge}$$

Dici Se l'int. converge, quando disug. $\sum x$
" diverge " dx .

In questo modo si studia facilmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\log k)^a}$$

Si riducono ai corrispondenti integrali, per cui sappiamo fare le primitive ☺

Dimostrazioni possibili :
→ serie - integrali
→ condensazione di Cauchy
→ disuguaglianze ad hoc

Il range più delicato è $a \in (1, 2)$. Da serie - integrali otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^a} &\leq \int_1^n \frac{1}{x^a} dx = \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^n = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{n^{a-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{n^{a-1}} \right) \end{aligned}$$

Aggiungendo il 1o termine diventa

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$
$$= \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

Provare a dimostrarla per induzione!
— o — o —

Esercizio 1 Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)}^{a_n}$$

Volendo si può dim. in maniera elementare che la succ a_n è monotona e ha un limite $l \in (0, +\infty)$.

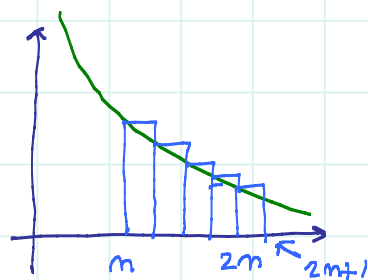
Brutal mode: $a_n \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \log(2n) - \log n = \log 2$ " "

Per renderlo riguroso uso la disug. serie integrali

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{1}{x} dx$$

" " "

$$\underbrace{\log \frac{2n+1}{n}}_{\downarrow \log 2} \leq \log \frac{2n}{n-1} \underbrace{\log \frac{2n}{n-1}}_{\downarrow \log 2}$$



Quindi $a_n \rightarrow \log 2$ per i carabinieri.

Esercizio 2 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n$. Allora $S_n \rightarrow +\infty$. Ma come?

Risposta: $S_n \sim \log n$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$

Rigoroso:

$$\int_1^{m+1} \frac{1}{x} dx \leq S_m \leq 1 + \int_1^m \frac{1}{x} dx$$

" " "

$$\log(m+1) \qquad 1 + \log m$$

Esercizio 3

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$$

Brutal mode:

$$\sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan x \sim x}}{\sim} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} \sim \int_m^{3m} \frac{1}{x} dx = \log 3$$

Rigoroso: chiamo a_k la succ. e cerco stime dall'alto e dal basso

$$\sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan x \leq x \\ \text{per } x \geq 0}}{\leq} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} \leq \int_{m-1}^{3m} \frac{1}{x} dx \leq \log \frac{3m}{m-1}$$

$\downarrow$
 $\log 3$

$$\sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan x \geq x - \frac{x^3}{3} \\ \text{per } x \geq 0 \\ \text{(studio di funzioni)}}}{\geq} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} - \frac{1}{3k^3} \geq \int_m^{3m+1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k^3}$$
$$= \log \frac{3m+1}{m} - \frac{1}{3} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k^3}$$

$\downarrow$ $\log 3$ $\downarrow$ 0

Fatto generale Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, allora $\sum_{k=m}^{3m} a_k \rightarrow 0$
(code di serie convergenti tendono a 0)

Dcu Chiamo S_n le somme parziali. Allora

$$\sum_{k=m}^{3m} a_k = \underbrace{S_{3m}}_d - \underbrace{S_{m-1}}_e \rightarrow 0$$

Esercizio 4

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^5} = C_m \quad \text{Allora } C_m \rightarrow 0$$

Ma come?

Brutale: $C_m \sim \int_m^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{x^4} \right]_m^{+\infty} = \frac{1}{4m^4}$

Claim: C_m ha parte principale $\frac{1}{4m^4}$.

Per dimostrarlo basta osservare che

$$\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx \leq C_m \leq \int_{m-1}^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx$$

e i due laterali si calcolano.

— o — o —