

Criterio di DIRICHLET

Consideriamo integrali con problemi all'infinito del tipo

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$$

Supponiamo che

① la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ è limitata

② la funzione g è di classe C^1 , deb. decr., e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Allora l'integrale improprio converge

Dim Integro per parti:

$$\int_a^A f(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^A - \int_a^A F(x) \cdot g'(x) dx$$

Vediamo i due pezzi

$$[F(x)g(x)]_a^A = \underbrace{F(A)g(A)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{per le ipotesi}}} - \underbrace{F(a)g(a)}_{\text{numero}}$$

Dico che $\int_a^{+\infty} F(x) \cdot g'(x) dx$ è assolutamente integrabile

$$\begin{aligned} \int_a^A \underbrace{|F(x)|}_{\leq M} \cdot |g'(x)| dx &\leq M \int_a^A |g'(x)| dx = -M \int_a^A g'(x) dx \\ &\quad \substack{\uparrow \\ \leq 0 \text{ per} \\ \text{ipotesi}} \\ &= -M (g(A) - g(a)) \\ &\quad \substack{\downarrow \\ 0} \end{aligned}$$

Quindi, mandando $A \rightarrow +\infty$, ottengo

$$\int_a^{+\infty} |F(x)| \cdot |g'(x)| dx \leq M \cdot g(a) \quad \ddot{\smile}$$

Oss. Posso riimpastare la monotonia di g nell'ipotesi 2 con

$$\int_a^{+\infty} |g'(x)| dx < +\infty \quad (\text{variazione limitata})$$

— o — o —

DIRICHLET PER SERIE

Lemma di sommazione parziale (ABEL) (int. per parti con le serie)

Siano a_n e b_n due successioni.

Allora per ogni coppia di interi $0 \leq m < n$ vale la relazione

$$\sum_{k=m}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m - \sum_{k=m}^n b_k (a_{k+1} - a_k)$$

Dim Considero $a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k$ (specie di derivata del prodotto) e sommiamo per $k = m, \dots, n$

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m$$

↑
telescopica

(int. derivata = differenza valori agli estremi)

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{k=m}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_{k+1} b_k + a_{k+1} b_k - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=m}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^n b_k (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

Riorganizzando i termini ottengo la tesi.

Criterio di Dirichlet per le serie

Supponiamo che

① le somme parziali di A_n sono limitate

② b_n è deb. decr. e $b_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Oss. Dirichlet $\Rightarrow$ Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} b_n$$

Le somme parziali di A_n sono limitate (sono 0 e ± 1 alternati)

Le ipotesi su b_n sono le stesse.

Dim di DIRICHLET

Uso il lemma di sommazione con

A_k al posto di b_k e $(A_k = a_1 + \dots + a_k)$

b_k al posto di a_k

Il lemma diventa

$$\sum_{k=m}^n b_{k+1} (A_{k+1} - A_k) = b_{n+1} A_{n+1} - b_m A_m - \sum_{k=m}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$$

La uso con $m = 1$ (o comunque l'indice iniziale) e $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^n b_{k+1} a_{k+1} = \underbrace{b_{n+1} A_{n+1} - b_m A_m}_{\substack{\downarrow 0 \quad \downarrow \text{limit.} \\ \downarrow 0}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k)}_{\text{spesso assol. conv.}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \underbrace{|A_k|}_{\leq M} |b_{k+1} - b_k| &\leq M \sum_{k=1}^n |b_{k+1} - b_k| = -M \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) \\ &= -M (b_{n+1} - b_1) = Mb_1 \end{aligned}$$

$\downarrow$
0

tutto come nel caso degli integrali.

Oss. Come con gli integrali posso sostituire la monotonia di b_n con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k| < +\infty.$$

Esempio classico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ o più in gen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^a}$ $a > 0$

Con $a > 1$ c'è assoluta convergenza. Con $a > 0$ c'è comunque convergenza per Dirichlet.

Cosa serve?

Serve che le somme parziali di $\sin n$ abbiano un bound uniforme, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall n \geq 1, \left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq M$$

In generale c'è una formula per le somme di $\sin(kx)$ che si dimostra per induzione.

Idea per ottenerla osservando che $\sin(kx) = \text{Im}(e^{ikx})$ quindi

$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \text{Im} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n e^{ikx}}_{\text{geometrica}} \right) = \text{Im} \left(\frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$$

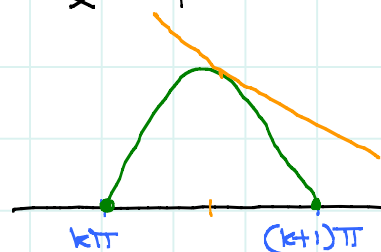
ora basta usare le formule per le potenze dei numeri complessi. Il bound segue dal fatto che al num. ci sono solo $\sin$ e $\cos$ e il denom. non dipende da n .

— o — o —

Back to lezione precedente Come è fatta $\frac{|\sin x|}{x}$ per $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$

C'è un max, ma non è nel pto medio.

1° modo: derivo e vedo che $f'(\text{pto medio}) \neq 0$



2° modo: nel pto medio è tangente a $\frac{1}{x}$, quindi ha la stessa derivata che è < 0 , quindi un po' a sx del pto medio vale di più

— o — o —