

INTEGRALI OSCILLANTI (Oscillatory integrals)

Due strumenti : $\rightarrow$ trucco integrazione per parti
 $\rightarrow$ metodo dei triangolini (rettangolini)

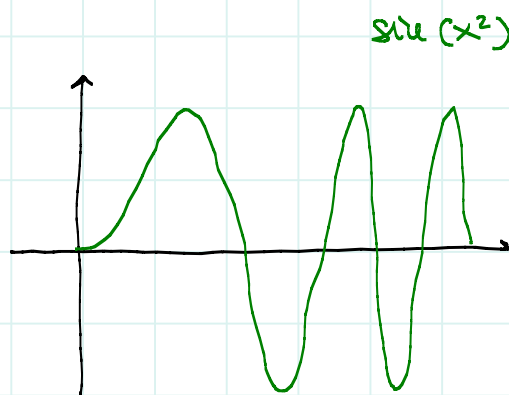
Esempi principali

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \\ \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \end{aligned} \right\} \text{convergono}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx &= +\infty \\ \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx &= +\infty \\ \int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx &= +\infty \end{aligned}$$

Interpretazione grafica

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx =$ somma a segno
 alternato delle aree
 (converge per "effetto
 Leibniz")



$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx =$ la somma con il segno + diverge

Integrali classici

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{integrale di GAUSS})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{integrale di DIRICHLET})$$

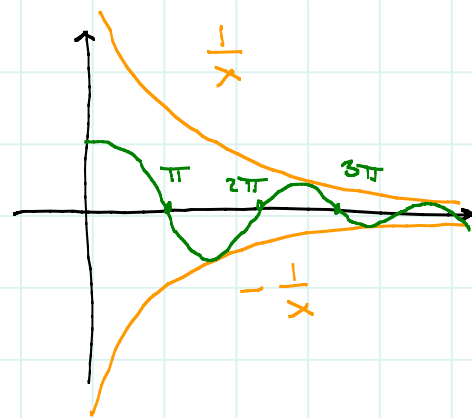
$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad (\text{integrale di FRESNEL})$$

AM2

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots$$

↑
integrale PROPRIO



$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx &= \int_1^A \sin x \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right]_1^A - \int_1^A (-\cos x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

Facciamo il limite per $A \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

L'ultimo però è un integrale improprio sul quale posso usare assoluta integrabilità

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

↑
comparato
tra integrande
 ≥ 0

↑
assol.
integrab.

Oss. Allo stesso modo si dimostra che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

(in 0 ci sarebbe una divergenza appena $a \geq 2$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

(in 0 ci sarebbe una divergenza appena $a \geq 1$)

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{PROPRIO}} + \int_1^{+\infty} \dots$$

$$\int_1^A \cos(x^2) dx = \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx$$

$$= \left[\underbrace{\frac{1}{2x}}_G \underbrace{\sin(x^2)}_F \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\sin(x^2)}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}_g dx$$

$$= \frac{\sin(A^2)}{2A} - \frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Passando al limite si conclude come prima.

Oss. Allo stesso modo si fa quello con $\sin(x^2)$

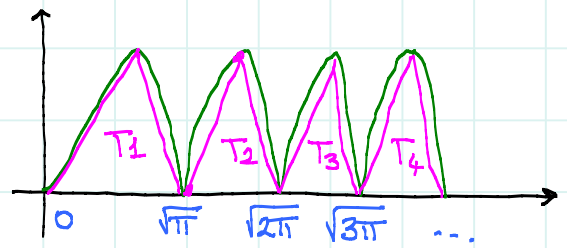
Analogamente si ottiene la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^a) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^a) dx$$

purché $a > 1$.

Nota che per $a = 1$ risultano entrambi indeterminati
— 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx = +\infty$



Idea: L'integrale improprio è
 $\geq$ della somma delle aree
 dei triangolini che stanno sotto il grafico.

Il triangolo T_k ha altezza 1 e come base l'intervallo
 $[\sqrt{(k-1)\pi}, \sqrt{k\pi}]$

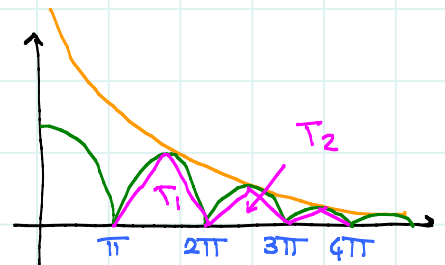
quindi la base è lunga $\sqrt{\pi} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Quindi

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \geq \underbrace{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}_{\text{area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza}}$$

La serie diverge perché $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$



La base di T_k è lunga π

L'altezza è il valore della funzione

nel p.to medio della base che è $k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Quindi $\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \pi \frac{2}{\pi} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$

e come prima $\int_0^{+\infty} \dots \geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = +\infty$

Oss. Lo stesso metodo mostra che $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^a} dx = +\infty \quad \forall a \leq 1$

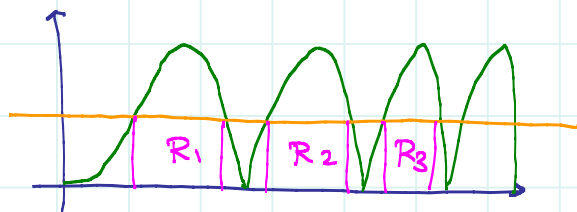
Achtung! Nei due esempi abbiamo assunto che il triangolino stia sotto la funzione, il che andrebbe dimostrato (nel caso di T_1 del primo esempio è pure falso!)

Via uscita facile: usare i rettangolini.

Nel primo esempio mi chiedo dove $|\sin(x^2)| \geq \frac{1}{2}$

L'altezza di R_k è $\frac{1}{2}$

La base è ... $|\sin(x^2)| = \frac{1}{2}$



$$x^2 = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x^2 = k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

La base è lunga $\sqrt{k\pi + \frac{5\pi}{6}} - \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{6}} \sim \frac{\text{costante}}{\sqrt{k}}$

Stesso discorso per l'esempio 4.

— o — o —