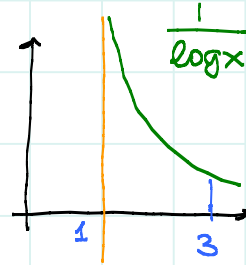


Integrali con problemi in punti strani

SLOGAN: portare il problema in zero!

Esempio 1 $\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx$



Pongo $x = y+1 \Rightarrow dx = dy$

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx = \int_0^2 \frac{1}{\log(y+1)} dy \quad \text{Ora il pbm. è in 0}$$

Brutale $\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y}$ quando $y \rightarrow 0^+$

quindi si comporta come $\int \frac{1}{y} dy$ con pbm. in $y=0$, cioè diverge.

Oss. È lecito fare i cambi variabile sugli int. impropri?

Sì, basta farlo prima di passare al limite

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{1}{\log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy$$

$\uparrow$
 faccio il
 cambio sull'int.
 PROPRIO

$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy$$

Esempio 2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

Il pbm. è in $x = \frac{\pi}{2}^-$. Come lo porto in 0^+ ?

Pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$ da cui $dy = -dx$

$$\begin{aligned} x=0 &\leadsto y = \frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} &\leadsto y = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

precorso $\nearrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$

$\frac{\cos x}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0^+$, quindi diverge

Esempio 3 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{\log x}}$ Due problemi, $f(x) \geq 0$

a $+\infty$ $\frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \leq \frac{1}{x^2}$ per x grande ($x \geq e$)

Quindi per confronto a 2 converge

in $x=1$ Brutale $\frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\log x}}$ e ci si riduce a $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con p.b.m. in $y=0$

Rigoroso: come prima $x = 1+y$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2 \sqrt{\log(1+y)}} \, dy$$

$\uparrow$
C.A. con $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

Esempio 4 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \, dx$ $f(x) \geq 0$ e 2 p.b.m.

x $+\infty$ Converge per C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

x $= 1$ $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$

$\uparrow \uparrow$
colpevole dell'improprietà

quindi è come fosse $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ con p.b.m. in $x=1$, cioè $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con p.b.m. in $y=0$, quindi converge

Tabellina

$$\int \frac{1}{|x-a|^b} dx =$$

↑
con pbm.
in $x=a$

↗ converge se $b < 1$
↘ diverge se $b \geq 1$

Dim: si riporta in 0 ponendo $x-a=y$

Esempio 5 $\int_0^1 (\log x)^{30} dx$



Converge! Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log x)^{30}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\log x)^{30} = 0 \quad (\text{limite dimenticato})$$

↑
caso limite

Quindi vicino a 0 vale

$$0 \leq (\log x)^{30} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{e si chiude per confronto}$$

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^4 - 1} dx$

$f(x) \geq 0$ sempre (i segni si compensano)

Problemi in $0, 1, +\infty$

+∞ Converge ($\log x$ rompe, ma poco). C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \log x}{x^4 - 1} = 0 \quad \text{caso limite!}$$

quindi $f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ per x grandi, e si chiude per confronto.

x=1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}$

↑
Hôp

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{(1+y)^4 - 1} \\ = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{4y + o(y)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Quindi il pbm. in $x=1$ non c'è !!!

$x > 0$ $f(x) \rightarrow +\infty$, sì ma quanto! Come $-\log x$

Quindi confronto asintotico con $g(x) = -\log x$ e $\int_0^1 (-\log x) dx$ converge (volendo si calcola, volendo si confronta con $\frac{1}{\sqrt{x}}$).

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7 + 3x^3 - 2}} dx$

C'è un problema $a + \infty$ e converge per C.A. con $\frac{1}{x^{7/3}}$ e $\frac{7}{3} > 1$.

Problema più grave: il denom. si annulla da qualche parte, perché in $x=0$ vale -2 e per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$.

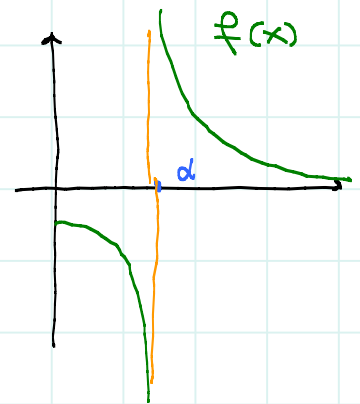
Si annulla in un solo p.to perché è strett. crescente:

la sua derivata è $7x^6 + 9x^2 \geq 0$ con annullamento sporadico.

Quindi c'è un unico altro p.to. in un p.to $d > 0$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^d \dots + \int_d^{d+\epsilon} \dots + \int_{d+\epsilon}^{+\infty} \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{e.o.}}$



Non conosco d , ma faccio il claim che

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x-d}}$$

Se fosse così, convergono anche gli altri 2

$$\lim_{x \rightarrow d} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow d} \frac{\sqrt[3]{x-d}}{\sqrt[3]{x^7 + 3x^3 - 2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow d} \frac{x-d}{x^7 + 3x^3 - 2}}$$

$$\stackrel{\text{Höp}}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow d} \frac{1}{7x^6 + 9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7d^6 + 9d^2}} \neq 0 \text{ e } \neq +\infty$$

Achtung! Non c'è la cond. nec. per la conv. degli int. impropri

