

CRITERI DI CONVERGENZA PER INTEGRALI IMPROPRI

Come stabilire se un integrale improprio (monoproblema) converge o no senza calcolarlo esplicitamente

Integranda a segno costante

- criterio confronto
- criterio confronto asintotico
 - casi standard
 - casi limite

Integr. a segno variabile

- assoluta integrabilità

Oss. Se l'integranda $f(x)$ è ≥ 0 (vicino a dove c'è il problema) allora l'int. improprio può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Dim. basta osservare che la quantità di cui si fa il limite è monotona nel parametro

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx \text{ è deb. cresc. in } A$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \text{ è deb. decr. in } \varepsilon$$

(una funzione che cresce andando indietro è decrescente)



Criterio confronto

$$\int_E f(x) dx \qquad \int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$
(basta $\forall x$ vicino al problema)

Allora valgono queste implicazioni (e solo queste)

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

cioè converge

Criterio confronto asintotico

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E (vicino al problema)
e

$$\lim_{x \rightarrow \text{pbm}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

$\uparrow$
p.to in cui c'è il problema

Allora i due integrali hanno lo stesso comportamento.

Dim. Per x vicino al pbm. vale che $0 < \frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l$
e quindi

$$\frac{1}{2} l g(x) \leq f(x) \leq 2l g(x)$$

Se $\int_E g(x) dx < +\infty$, quando disug. dx

Se $\int_E g(x) dx = +\infty$, quando disug. dx

Oss. Se $l = 0$ oppure $l = +\infty$, allora si salva solo una delle due implicazioni.

Absoluta integrabilità

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

Integrali da tabellina con cui confrontare

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \leq 1 \\ \searrow \text{converge se } b > 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \geq 1 \\ \searrow \text{converge se } b < 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \leq 1 \\ \searrow \text{converge se } b > 1 \end{cases} \quad (a > 1)$$

↑
per evitare il
pbm di $\log$ in $x=1$

L'ultimo si dimostra facendo la primitiva, che è

$$\frac{1}{1-b} \frac{1}{(\log x)^{b-1}} \quad \text{se } b \neq 1 \quad \text{e} \quad \log(\log x) \quad \text{se } b = 1$$

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \sqrt{x}} dx$

Integranda ≥ 0 . Due problemi: in 0 e $+\infty$. $\int_0^5 \dots + \int_5^{+\infty} \dots$

Pbm. a $+\infty$ $\frac{\arctan x}{x \sqrt{x}} \leq \frac{3/2}{x^{3/2}} \quad \frac{3}{2} > 1 \leadsto \text{converge}$

Pbm. a 0 Brutale: $f(x) \sim \frac{x}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{2} < 1 \leadsto \text{converge}$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

↑
problema

Quindi $\int_0^5 f(x) dx$ si comporta come $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, cioè converge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Unico pbm. a $+\infty$, $f(x) \geq 0$ sempre. Ora

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 1 \quad (\text{cioè vicino al problema})$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty \quad (\text{si calcola}) \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

↑
confronto

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

$f(x) \geq 0$. Solo problema a $+\infty$ perché in 0 la funzione è limitata

Brutale: $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ quando $x \rightarrow +\infty$, quindi diverge perché l'esponente è 1.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ (diventa il solito limite notevole)

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x| - 1}{x^2} dx$

$f(x) \leq 0$ sempre, quindi meglio studiare $\int_0^{+\infty} \frac{1 - |\cos x|}{x^2} dx$

Quanti problemi? Stannamente $+\infty$

Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione tende a $\frac{1}{2}$, quindi in 0 non c'è nessun problema!

Per il pbm. a $+\infty$ basta osservare che $0 \leq \frac{1 - |\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Achtung! $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$, ma questo non vuol dire che anche l'altro diverge

Diverge per colpa del pbm. in 0, mentre a $+\infty$ converge, quindi il nostro per confronto converge!!

MORALE: il confronto vale solo tra integrali uno su problema

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$

Seguo variabile, problemi in $x=0$ e $x=+\infty$

pbm in $x=0$ Osservo che $0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^3 |f(x)| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ confronto tra integrande ≥ 0 $\uparrow$ assol. integrabilità

Problema a $+\infty$ Osservo che $f(x) \geq 0$ per x grandi

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge

$\uparrow$
 $g(x)$ con cui confrontare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \sim \dots$$

— o — o —