

INTEGRALI IMPROPRI

Quando manca almeno uno degli ingredienti degli integrali propri:

→ zona di integrazione illimitata

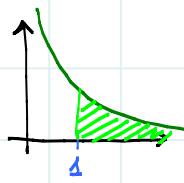
→ funzione illimitata

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



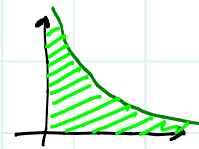
FUNZ. NON
LIMITATA

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



ZONA INT.
NON LIMITATA

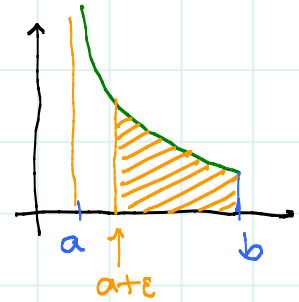
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



ZONA E FUNZIONE
NON LIMITATE

INTEGRALI MONOPROBLEMA

Scenario 1 $\int_a^b f(x) dx$



Supponiamo che $f(x)$ abbia problemi

solo in a , cioè $\forall \epsilon > 0$ si ha che (basta $0 < \epsilon < b-a$)

$f(x)$ è integrabile in $[a+\epsilon, b]$. In questo caso per definizione

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

Il discorso è del tutto analogo se il problema è solo in b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

Scenario 2

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$



Supponiamo che, per ogni $A > a$, si abbia che $f(x)$ è integrabile in $[a, A]$. Allora si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Discorso analogo per $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$

E se i problemi sono tanti?

Si spezza in tanti integrali con un problema solo

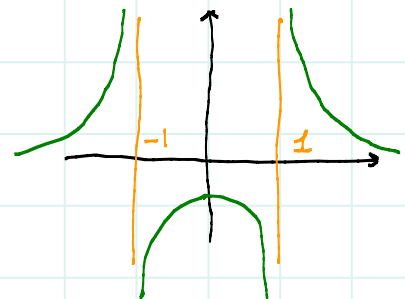
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^{14} \frac{1}{x} dx + \int_{14}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

↑ ↑
hanno un problema solo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{-25} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{-25}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} \dots + \int_{-2}^{-1} \dots + \int_{-1}^0 \dots + \int_0^1 \dots + \int_1^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots$$



Essendo un limite un integrale improprio unoproblema ha

4 possibilità: → converge

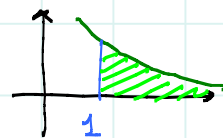
→ diverge a $+\infty$

→ " " $-\infty$

→ è indeterminato

Se i problemi sono più di uno, si spezza e poi si procede come nel limite della somma, con l'accordo che se almeno un pezzo diverge a $+\infty$ e almeno un pezzo diverge a $-\infty$, allora quello globale è INDETERMINATO per definizione.

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ [deve venire positivo]



$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-\underbrace{e^{-A}}_0 + e^{-1}] = \frac{1}{e}$$

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ [unico pbm. a $+\infty$: deve venire > 0]

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan A - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}$$

Quindi per simmetria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Esempio 3 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ [Unico pbm. in $x=0$: deve venire > 0]

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2\sqrt{2}$$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A = \text{NON ESISTE (indet.)}$

Esempio 5 $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 2 - \log \varepsilon) = +\infty$

Esempi classici

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

↑
qualsunque
cosa > 0

Più a è grande,
più $f(x)$ è piccola
più è facile che
l'integrale
converga

$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^a} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^A \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{A^{a-1}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Se $a > 1$ il limite è $\frac{1}{a-1}$. Se $a < 1$ il limite è $+\infty$.

Se $a = 1$ la primitiva è $\log x$, quindi viene

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \log A = +\infty$$

qualsunque cosa > 0

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

se a diventa
grande, il denum.
diventa piccolo,
quindi la funzione
è grande

La dim è come prima

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^{a-1}} \right]$$

↑
 $a \neq 1$

Se $a > 1$ il limite è $-(-\infty) = +\infty$

Se $a < 1$ il limite è $\frac{1}{1-a}$

Se $a = 1$ è l'esempio 5 di sopra.

Oss. Se l'unico problema è a $\pm\infty$, allora "il primo estremo non conta". Ad esempio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx \text{ si comporta come } \int_{22}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx$$

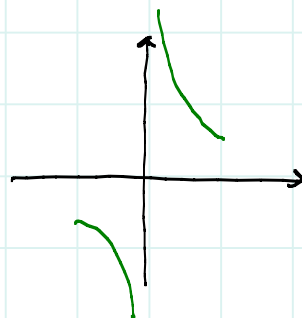
Infatti

$$\int_2^A \dots = \int_2^{22} \dots + \int_{22}^A \dots$$

quindi i due limiti differiscono per una costante.

L'ESEMPIO $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$



NO!!! Si tratta di un integrale improprio. Bisogna spezzare!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } -\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } +\infty}$$

Quindi è indeterminato

Ad esempio

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx$$



Il buco è ampio 3ε , ma la somma tende a $-\infty$.

Se scelgo bene gli estremi, tende a 2025.

— 0 — 0 —