

Scenario 4: formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$ (ultima spiaggia: se le conosci le eviti)

Precorso: pongo $t = \tan \frac{x}{2}$ e ho che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t \leadsto x = 2 \arctan t \leadsto dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Esempio 1 (Scenario 4) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

Uso le formule parametriche: $\int \frac{\cancel{1+t^2}}{2t} \frac{2}{\cancel{1+t^2}} dt$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Alternativa $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$

Pongo $y = \cos x$ e diventa $-\int \frac{dy}{1-y^2} =$ si fa
(controllare che venga uguale)

Esempio 2 (Ripasso lezione precedente)

Tanti modi per fare $\int \sqrt{x^2-1} dx$

1° modo: $\sqrt{x^2-1} = x+y$

2° modo: $\sqrt{x^2-1} = y(x+1)$ oppure $\sqrt{x^2-1} = y(x-1)$

3° modo: $x = \cos^2 y$ ~ viene $\int \sin^2 y \, dy$

4° modo: $x = \frac{1}{\cos y}$ (oppure $x = \frac{1}{\sin y}$)

$$\text{Viene } \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} \underbrace{\frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy}_{dx} = \int \frac{\sin y}{\cos y} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy$$

$$= \int \frac{\sin^2 y}{\cos^3 y} \, dy = \int \frac{\sin^2 y \cos y}{\cos^4 y} \, dy = \int \frac{\sin^2 y}{(1 - \sin^2 y)^2} \cdot \cos y \, dy$$

Pongo $\sin y = t$ e diventa $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} \, dt$ che è razionale

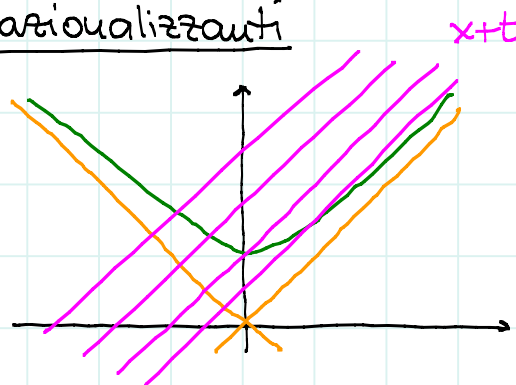
[Controllare che venga lo stesso in tutti i modi]
— o — o —

Interpretazione di alcune sostituzioni razionalizzanti

$$\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{f(x)} = x+t$$

$y = \sqrt{x^2+1}$ è come dire

$$y^2 = x^2+1 \quad \text{cioè} \quad y^2 - x^2 = 1$$



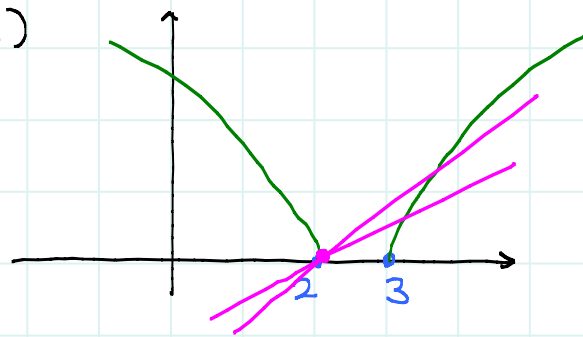
Ora $x+t$, al variare di t , è una famiglia di rette // alla bisettrice. Tutte queste rette intersecano una volta sola l'iperbole. Quindi posso parametrizzare l'iperbole con due funzioni razionali della t

$$\begin{cases} y = x+t \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

Secondo caso: $\sqrt{x^2-5x+6} = t(x-2)$

Il grafico è circa come in figura

$y = t(x-2)$ è la generica retta che passa per $(2,0)$



Ciascuna di queste rette interseca l'iperbole in 2 pt (quando messo a sistema è di 2° grado), ma uno lo conosco perché è $(2,0)$ quindi l'altro sarà per forza razionale come funzione di t (perché il prodotto delle due radici è razionale)

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - 5x + 6 \\ y = t(x-2) \end{cases} \quad t^2(x-2)^2 = x^2 - 5x + 6 \text{ ha una radice so essere } x=2,$$

Esempio creativo $\int \sqrt{x^2 + 7x + 1} dx$

Vedo che magicamente per $x=1$ viene 3. Quindi il grafico passa per $(1,3)$. Ma allora pongo

$$\sqrt{x^2 + 7x + 1} = \underbrace{3 + t(x-1)}_{\text{generica retta per } (1,3)}$$

$$x^2 + 7x + 1 = 9 + t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$$

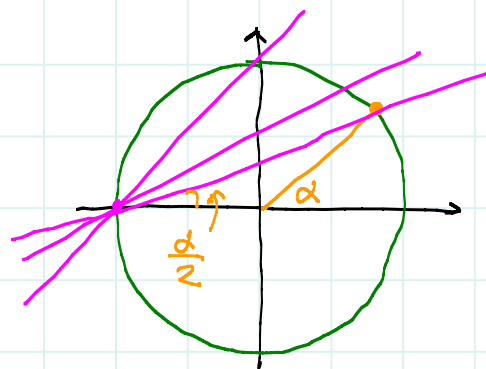
$$x^2 + 7x - 8 = t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$$

$$(x+8)(x-1) \rightsquigarrow \text{è di primo grado in } x !!$$

Finestra sul futuro: anche le rette $y = x+t$ passano per uno stesso "punto all'infinito" nel piano proiettivo.

Torniamo alla circonferenza

Di sicuro si parametrizza come $(\cos d, \sin d)$ con $d \in [0, 2\pi]$



Consideriamo tutte le rette che passano per $(-1, 0)$.

Tutte queste intersecano una sola volta la circ. oltre a $(-1, 0)$

Le rette sono $y = t(x+1)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x+1) \end{cases} \leadsto x^2 + t^2(x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\leadsto (t^2+1)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

Una radice è $x = -1$, il prodotto è $\frac{t^2-1}{t^2+1}$, quindi l'altra

radice è $\frac{1-t^2}{1+t^2} \leadsto$ il corrispondente $y = t(x+1) = \frac{2t}{1+t^2}$

Così abbiamo ottenuto le formule parametriche

Se il p.to P della circ. corrisponde ad un angolo α , il suo t corrispondente è il coeff. ang. della retta per P e $(-1, 0)$ e questo è $\tan \frac{\alpha}{2}$.

Fatto generale Riesco a trovare una sostituzione razionalizzante per $\int f(x) dx$ tutte le volte che riesco a parametrizzare il grafico di f con funzioni razionali di t .