

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Come trasformare integrali di funzioni "strane" in int. di funzioni razionali

Quattro scenari : ① Raz (e^x)

② Raz ($x, \sqrt{ax+b}$) Raz ($x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$)

③ Raz ($x, \sqrt{ax^2+bx+c}$)

④ Raz ($\sin x, \cos x$)

Esempio 1 (Scenario 1) $\int \frac{1}{e^x+2} dx$

Pongo $y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x+2} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{y+2} \cdot \frac{1}{y}} \cdot \underbrace{\frac{e^x dx}{dy}}_{dy} = \int \frac{1}{y(y+2)} dy = \text{si fa}$$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}$$

Molt. per y e $y=0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

Molt. per $y+2$ e $y=-2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{y(y+2)} dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+2} dy = \frac{1}{2} \log |y| - \frac{1}{2} \log |y+2|$$

Torno in x e ottengo $\int \frac{1}{e^x+2} dx = \frac{1}{2} \log(e^x) - \frac{1}{2} \log(e^x+2)$

↑
positivi, quindi inutile

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \log(e^x+2)$$

↳ Verifica

Alternativa per il cambio: $y = e^x \rightsquigarrow x = \log y \rightsquigarrow dx = \frac{1}{y} dy$

$$\int \frac{1}{e^x + 2} dx = \int \frac{1}{y+2} \frac{1}{y} dy = \text{come prima}$$

Esempio 2 (Scenario 1) $\int \frac{8^x}{4^x + 1} dx$

Pongo $y = 2^x \rightsquigarrow dy = 2^x \cdot \log 2 \cdot dx$

$$\int \frac{8^x}{4^x + 1} dx = \int \underbrace{\frac{4^x}{4^x + 1}}_{\frac{y^2}{y^2 + 1}} \frac{1}{\log 2} \cdot \underbrace{\log 2 \cdot 2^x dx}_{dy}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2}{y^2 + 1} dy \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ +1 -1 \\ \text{al num} \end{array} = \frac{1}{\log 2} \int \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy$$

$$= \frac{1}{\log 2} (y - \arctan y) = \frac{1}{\log 2} (2^x - \arctan(2^x))$$

Esempio 3 (Scenario 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} dx$ Raz ($x, \sqrt{x+1}$)

Pongo $y = \sqrt{x+1} \rightsquigarrow y^2 = x+1 \rightsquigarrow x = y^2 - 1 \rightsquigarrow dx = 2y dy$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} dx = \int \frac{y}{y^2 + 2} \cdot 2y dy = \text{si fa}$$

Esempio 4 $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx$ Poteva essere $\int \frac{x^2 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}{2 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}} dx$

Pongo $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \rightsquigarrow y^2 = \frac{x+1}{x+3} \rightsquigarrow \boxed{y^2 x + 3y^2 = x+1}$

$$\rightsquigarrow x(y^2 - 1) = 1 - 3y^2 \rightsquigarrow x = \frac{1 - 3y^2}{y^2 - 1}$$

$\uparrow$ eq. di primo grado in x

$$\rightsquigarrow dx = \left(\frac{1 - 3y^2}{y^2 - 1} \right)' dy$$

Quindi

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx = \int \underset{G}{y} \left(\underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} \right)' dy =$$
$$= \underset{G}{y} \cdot \underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} dy = \text{si fa}$$

Esempio 5 (Scenario 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

Radici diverse
della stessa roba

Pongo $y = \sqrt[6]{x}$ (in generale uso minimo comune multiplo)

$$\leadsto x = y^6 \leadsto dx = 6y^5 dy$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int \frac{y^3}{y^2+1} \cdot 6y^5 dy = \text{si fa}$$

Esempio 6 (Scenario 3) $\int \sqrt{x^2+3x+4} dx$

Pongo $\sqrt{x^2+3x+4} = x+y \leadsto \boxed{x^2+3x+4 = \cancel{x^2}+2xy+y^2}$

è di primo grado in x

$$x(2y-3) = 4-y^2 \leadsto x = \frac{4-y^2}{2y-3}$$

$$\leadsto dx = \left(\frac{4-y^2}{2y-3} \right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+3x+4} dx = \int \left(\underset{x}{\frac{4-y^2}{2y-3}} + \underset{+y}{y} \right) \left(\frac{4-y^2}{2y-3} \right)' dy = \text{razionale}$$

Esempio 7 (Scenario 3) $\int \sqrt{2x^2+5} dx$

Pongo $\sqrt{2x^2+5} = \sqrt{2}x+y \leadsto \cancel{2x^2}+5 = \cancel{2x^2}+2\sqrt{2}xy+y^2$

è di primo grado in x, e
quindi concludo

Fatto generale : se abbiamo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ si pone $= \sqrt{a}x+y$
e funziona purché $a > 0$

Esempio 8 (Scenario 3) $\int \sqrt{x^2-5x+6} dx$

Potei farlo come prima, ma cerco alternativa.

Osservo che $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ e pongo

$$\sqrt{x^2-5x+6} = y(x-2) \quad [\text{oppure } y(x-3)]$$

$$(\cancel{x-2})(x-3) = y^2(x-2)^2 \quad \leadsto \text{è di primo grado in } x!$$

$$x(1-y^2) = 3-2y^2 \quad \leadsto \quad x = \frac{3-2y^2}{1-y^2} \quad \leadsto \quad dx = (\dots)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2-5x+6} dx = \int \underbrace{y(x-2)}_{y(x-2)} \underbrace{\left(\frac{3-2y^2}{1-y^2} - 2 \right) dy}_{\frac{dx}{dy}} = \text{si fa}$$

Fatto generale Se ax^2+bx+c si fattorizza come $(x-\lambda)(x-\mu)$
allora posso porre

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure } y(x-\mu).$$

Riassunto $\sqrt{ax^2+bx+c}$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	1° modo 2° modo	1° modo
$a < 0$	2° modo	⋮ ↑ ↑

in questo caso ho $\sqrt{a} < 0$
quindi non ha senso integrare!

3° modo Ogni pd. di secondo grado si può scrivere come

$$x + (ax+b)^2 \rightsquigarrow 1+x^2 \text{ oppure } -1+x^2$$

$$x - (ax+b)^2 \rightsquigarrow 1-x^2 \text{ oppure } -1-x^2$$

Quindi basta saper fare $\sqrt{x^2+1}$ $\sqrt{x^2-1}$ $\sqrt{1-x^2}$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \text{ si fa con } x = \sin y$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \text{ si fa con } x = \sinh y$$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2 x} \cdot \cosh y dy = \int \cosh^2 y dy$$

e questo si fa in almeno 3 modi

→ grande ritorno

→ formula per $\cosh(2y)$

→ usando formula esplicita per $\cosh y$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \text{ si fa con } x = \cosh y$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 y - 1} \sinh y dy = \int \sinh^2 y dy = \text{come prima}$$

— 0 — 0 —