

Fattorizzazione di pol. reali

Step 1 Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice $\alpha \in \mathbb{C}$

Dim Teo fondamentale dell'algebra

Step 2 Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ di grado $d \geq 1$ è il prodotto di d polinomi di grado 1

Dim Teo. Ruffini + induzione dallo Step 1

Step 3 Se $P \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora $\bar{\alpha}$ è una radice

Dim $P(\alpha) = 0 \leadsto$ faccio il coniugato e i coeff. di P non cambiano

Step 4 Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $P \in \mathbb{R}[x]$ con mult. m , allora anche $\bar{\alpha}$ ha mult. m

Dim $P(x) = (x - \alpha)^m Q(x)$
 $\uparrow$
 coeff. in $\mathbb{C}$

Faccio il coniugato $P(x) = (x - \bar{\alpha})^m \bar{Q}(x)$

Questo dice che $\bar{\alpha}$ ha mult. $\geq m$. Poi scambio il ruolo di α e $\bar{\alpha}$.

Step 5 Fattorizz. reale

Dim Prendo la fattorizz. complessa e accoppio i termini $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ quando α non è reale.

Decomposizione in fratti semplici

Analogo aritmetico: ogni frazione è somma di frazioni i cui denominatori sono potenze di primi

Lemma Se $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, con Q_1 e Q_2 relativamente primi, cioè senza fattori in comune, allora

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

per opportuni P_1 e P_2

Dim BEZOUT vale in $R[x]$ che è un anello euclideo.

Allora esistono $M(x)$ ed $N(x)$ t.c.

$$1 = M(x) \cdot Q_1(x) + N(x) \cdot Q_2(x)$$

Ora diviso per $Q_1 \cdot Q_2$.

Per induzione sul numero di fattori vale la stessa cosa anche quando il denom. ha più fattori.

Oss. Dal lemma ottengo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P(x) \cdot P_2(x)}{Q_2(x)}$$

In generale i gradi del numeratore possono superare quelli del denominatore. Faccio la divisione e vo problem.

Tuttavia se $\deg P < \deg Q$ posso trovare una sol. in cui i gradi dei num sono $<$ gradi del denom.

Dopo la divisione avrèi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{R_2(x)}{Q_2(x)} + \underbrace{A_1(x) + A_2(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{polinomio che tende} \\ \text{a 0 all'infinito} \therefore \\ \text{Quindi è il pol. nullo}}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$

Usando il lemma, otteniamo una decomposizione i cui denominatori sono potenze di pol. di 1° o 2° grado

$$\frac{1}{(x+1)^{30}(x^2+5)^{20}} = \frac{P_1(x)}{(x+1)^{30}} + \frac{P_2(x)}{(x^2+5)^{20}}$$

Perché $\frac{P_1(x)}{(x+1)^{30}}$ è somma di fratti semplici?

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{29}x^{29} \sim 1, x, x^2, \dots, x^{29} \text{ sono una base di } \mathbb{R}_{\leq 29}[x]$$

Ma anche $1, (x+1), (x+1)^2, \dots, (x+1)^{29}$ sono una base (sono in numero giusto e lin. indep.)

Ma allora

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)^2 + \dots + c_{29}(x+1)^{29}$$

e quando divido per $(x+1)^{30}$ ho finito.

Il caso con il denom. di grado 2 è analogo.

Esempio $\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx$

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

Decomposizione: $\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$

Bovino: $1 = A(x-1) + B(x+3) = (A+B)x + (3B-A)$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{coeff. } x \\ -A+3B=1 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \text{Sommo: } 4B=1 \leadsto B=\frac{1}{4} \leadsto A=-\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{1}{x^2+2x-3} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log|x+3| + \frac{1}{4} \log|x-1| \end{aligned}$$

Più arduo Moltiplico la relazione per $x+3$

$$\frac{\cancel{x+3}}{(\cancel{x+3})(x-1)} = A + \frac{B(x+3)}{x-1}$$

Sostituisco $x = -3$ e trovo $A = -\frac{1}{4}$

Se volevo B , moltip. per $x-1$ e sostituisco $x=1$.

Oss. Con i fattori di secondo grado il metodo arduo funziona sostituendo le due radici complesse.

Esempio $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$

Posso farlo alla Hermite $\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{C+Dx+Ex^2+Fx^3}{(x^2+1)^2}$

Alternativa:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx &= \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx \\ &\quad \parallel \\ &\quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx = \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\frac{x}{(x^2+1)^3}} dx = \underset{G}{x} \left(\underset{F}{-\frac{1}{4(x^2+1)^2}} \right) + \frac{1}{4} \int \underset{G}{\frac{1}{(x^2+1)^2}} \underset{F}{dx}$$

e quindi ci si riduce al grado precedente.

Esempio $\int \frac{x^2}{x^4+1} dx$

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

— 0 — 0 —