

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P e Q in $\mathbb{R}[x]$

wlog possiamo supporre $Q(x)$ monico

Teorema Ogni funzione razionale ammette una primitiva che è comb. lin. di funzioni razionali e roba del tipo $\log(ax^2+bx+c)$ e $\arctan(ax+b)$.

Procedura: ① Divisione

② Fattorizzazione ← collo di bottiglia

③ Decomposizione

④ Integrazione

1 DIVISIONE Se $\deg(P) < \deg(Q)$ non c'è nulla da fare
Se $\deg(P) \geq \deg(Q)$, allora faccio la div. di pol.

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{\uparrow \deg(R) < \deg(Q)}$$

Da qui segue

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$\uparrow$ di questo so fare la primitiva $\uparrow$ Nuova funz. raz. con $\deg(R) < \deg(Q)$

Conclusione: basta saper fare la primitiva quando $\deg(\text{num}) < \deg(\text{den.})$

2 FATTORIZZAZIONE Scompongo il denominatore $Q(x)$.

Fatto generale: ogni polinomio a coeff. reali si può scrivere come prodotto di polinomi a coeff. reali di grado 1 o 2 (con quelli di grado 2 non ulteriormente scomponibili). Alcuni fattori possono essere ripetuti in molteplicità.

Al termine della fase 2 abbiamo

$$Q(x) = \prod_{i=1}^k \underbrace{(x + a_i)^{m_i}}_{\substack{\uparrow \\ \text{corrispondono} \\ \text{alle radici } -a_i \\ \text{di } Q(x) \text{ che} \\ \text{sono reali}}} \prod_{j=1}^R \underbrace{(x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{n_j}}_{\substack{\text{polinomio che ha} \\ \text{radici } \alpha_j \pm i\beta_j}}$$

3 DECOMPOSIZIONE Si scrive la funzione razionale come comb. lin. di funzioni razionali più semplici

Due metodi: $\rightarrow$ decomposizione in fratti semplici
 $\rightarrow$ decomposizione di HERMITE $\leftarrow$ più comoda

Fratti semplici Caso base: tutti i fattori di $Q(x)$ hanno molteplicità 1

$$\frac{x^3 + x + 7}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+9}$$

Sopra i fattori di grado 1 $\rightsquigarrow$ costante

" " 2 $\rightsquigarrow$ generico pol. di grado 1

Facendo i conti ottengo

$$x^3 + x + 7 = \underbrace{A(x-2)(x^2+3x+9) + B(x+1)(x^2+3x+9) + (Cx+D)(x+1)(x-2)}_{\text{pol. di grado 3 cui coeff. dipendono da } A, B, C, D}$$

Uguagliando ho un sistema lin. di 4 eq. in 4 incognite

Quando alcuni fattori hanno molteplicità, allora devo usare come denominatore tutte le potenze fino alla molteplicità

$$\frac{\dots}{(x+1)^3 (x^2+5)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+5} + \frac{Fx+G}{(x^2+5)^2}$$

Anche in questo caso $\neq$ incognite, e $\neq$ equazioni (il numeratore ha grado ≤ 6 , quindi $\neq$ coeff.)

Teorema (per ora misterioso) Posso sempre trovare in maniera unica i coeff.

Decomposizione di Hermite Se non ci sono molteplicità, coincide con la precedente.

Se ci sono molteplicità diventa

$$\frac{\dots}{(x+1)^3 (x^2+5)^2} = \underbrace{\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}}_{\substack{\uparrow \\ \text{tutti i fattori} \\ \text{usati solo una} \\ \text{volta}}} + \frac{d}{dx} \frac{\overbrace{Dx^3+Ex^2+Fx+G}^{\substack{\text{generico pol. con grado} \\ \leq \text{in meno risp. al} \\ \text{denom.}}}}{\underbrace{(x+1)^2 (x^2+5)}_{\substack{\uparrow \\ \text{stessi fattori di } Q(x), \\ \text{con molteplicità} \\ \text{diminuita di 1}}}}$$

Fatto misterioso: si trovano i coeff. in maniera unica

[4] INTEGRAZIONE Basta integrare i fratti semplici

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \log |x+a|$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^m} dx = \frac{A}{1-m} \frac{1}{(x+a)^{m-1}}$$

Vediamo i fratti con denom. di grado 2

$$\int \frac{3x+7}{x^2+1} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + 7 \int \frac{1}{x^2+1} dx$$
$$= \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 7 \arctan x$$

$$\int \frac{3x+7}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{4}{x^2+2x+2} dx$$

$\downarrow$
 $1 + (x+1)^2$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) + 4 \arctan(x+1)$$

Caso generale:

$$\frac{Ax+B}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{A}{2} \frac{2x-2\alpha}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{B+\alpha A}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$

$\downarrow$

$$\frac{A}{2} \log(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)$$

$$\frac{1}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2 + (x-\alpha)^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

$\downarrow$ primitiva

$$\frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

Esempi $\int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+2)$ [$\frac{1}{2}$ aggiunto dopo video]

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Più in generale $\int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$ se $a > 0$

Resterebbero da fare i fratti con denom. di grado 2 e molteplicità (che con Hermite non servono :)).

— 0 — 0 —