

Dim. teo. fondamentale Prendiamo una funzione integrale

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Prendiamo  $x_1 \in (a, b)$  e proviamo a calcolare  $F'(x_1)$ .

Per  $R > 0$  piccolo a sufficienza

$$\frac{F(x_1 + R) - F(x_1)}{R} = \frac{1}{R} \left\{ \int_{x_0}^{x_1 + R} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt \right\}$$

add. zona integr.  $\rightarrow$

$$= \frac{1}{R} \int_{x_1}^{x_1 + R} f(t) dt$$

lunghezza intervallo su cui integro

teo. media integrale  $\rightarrow$

$$= f(c(R))$$

p.to misterioso compreso tra  $x_1$  e  $x_1 + R$

Quando  $R \rightarrow 0$  abbiamo che

$c(R) \rightarrow x_1$  per carabinieri,

quindi per continuità

$$f(c(R)) \rightarrow f(x_1)$$

cioè

$$F'(x_1) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{F(x_1 + R) - F(x_1)}{R} = f(x_1).$$

Per  $R < 0$  quando arrivo a

$$\frac{1}{R} \int_{x_1}^{x_1 + R} f(t) dt$$

ho estremi invertiti e  $R < 0$ , quindi i due segni si annullano e posso continuare con il teo. della media integrale.

Oss. Se  $x_1 \in \{a, b\}$ , allora abbiamo solo  $R \rightarrow 0^+$  o  $R \rightarrow 0^-$ .

Cosa sappiamo (nel caso  $f$  continua)

1 - se usiamo una qualunque funzione integrale, allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (*)$$

2 - tutte le funzioni integrali sono primitive, cioè  $F' = f$

Resta il dubbio che esistano primitive per cui non vale (\*).

Prop. Se  $f$  è continua e  $F_1$  ed  $F_2$  sono due primitive, allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

(cioè due qualunque primitive IN UN INTERVALLO differiscono per una costante)

denunque in particolare

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

Dim Pongo  $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Allora

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e quindi  $G(x)$  è costante. Perché?

Lagrange!

$$G(x) - G(a) = (x-a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{compreso tra} \\ a \text{ e } x}}{G'(c)} = 0$$

Quindi  $G(x) = G(a)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

A questo punto

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + \cancel{c} - (F_2(a) + \cancel{c}) = F_2(b) - F_2(a)$$

— 0 — 0 —

Tecniche di integrazione: data  $f$ , trovare una qualunque  $F$  con  $F' = f$ .

Casi banali: leggere al contrario la tabellina delle derivate.

Notazione  $\int f(x) dx$  = una qualunque primitiva di  $f$   
 $\uparrow$   
integrale senza  
estremi

Esempi

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{per } x > 0$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

Discorso del  $+c$  Mania strana  $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$   
al variare di  $c \in \mathbb{R}$   
rappresenta l'insieme  
di tutte le primitive di  
 $f(x) = x$  in  $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c \quad \leftarrow \text{Questo NON è l'insieme di tutte le funzioni } +c. F'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

In questo secondo caso posso usare 2 valori di  $c$  diversi per  $x > 0$  e per  $x < 0$

Morale:  $\rightarrow$  il  $+c$  non serve nel calcolo di  $\int_a^b f(x) dx$  perché si semplifica

$\rightarrow$  non basta per descrivere tutte le primitive.

Quindi non serve a molto.

Dim. integrabilità di  $|f(x)|$  Ipotesi:  $f$  integrabile in  $[a, b]$

Tesi:  $|f|$  integr. in  $[a, b]$

Per il criterio di integrabilità devo, per ogni  $\varepsilon > 0$ , trovare

$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$\uparrow$  step. funct.  $\uparrow$

tali che

$$\int_a^b (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Dato  $\varepsilon > 0$ , per ipotesi so che  $f$  è int., quindi esistono

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

t.c.

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Dato  $\varphi$  e  $\psi$ , come costruisco  $\hat{\varphi}$  e  $\hat{\psi}$ ?

Suppongo wlog che  $\varphi$  e  $\psi$  arrivino da una stessa partizione di  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

In ogni intervallo  $(x_{i-1}, x_i)$  guardo il segno di  $f(x)$

→ se  $f(x) \geq 0$  sempre, allora uso  $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$  e  $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$  e allora gratis

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

→ Se  $f(x) \leq 0$ , allora uso  $\hat{\varphi}(x) = -\psi(x)$  e  $\hat{\psi}(x) = -\varphi(x)$  perché ora  $|f(x)| = -f(x)$ . Ancora una volta vale la relazione di sopra

→ Se  $f(x)$  cambia segno in  $(x_{i-1}, x_i)$ , osservo che  $\varphi(x) \leq 0$  e  $\psi(x) \geq 0$  nell'intervallo e pongo

$$\hat{\varphi}(x) = 0$$

$$\hat{\psi}(x) = \max \{ \psi(x), |\varphi(x)| \}$$

e osservo che

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \max \{ \underbrace{\psi(x)}_{\geq 0}, \underbrace{|\varphi(x)|}_{\geq 0} \} dx$$

$$\max \{ A, B \} \leq A + B$$

Se  $A \geq 0$  e  $B \geq 0$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) + |\varphi(x)|) dx$$

$$\underbrace{|\varphi| = -\varphi}_{\text{essendo } \leq 0} \rightarrow = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

Quindi in ogni intervallo vale che

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

Quando sommo ottengo la tesi.

— o — o —