

Esempio 1 Risolvere la diseq. $x + 2 \sin x \geq 0$

Oss. Sarebbe bello fosse $\underbrace{x + \sin x}_{\uparrow f(x) \text{ è strett. cresc.}} \geq 0$

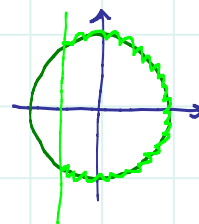
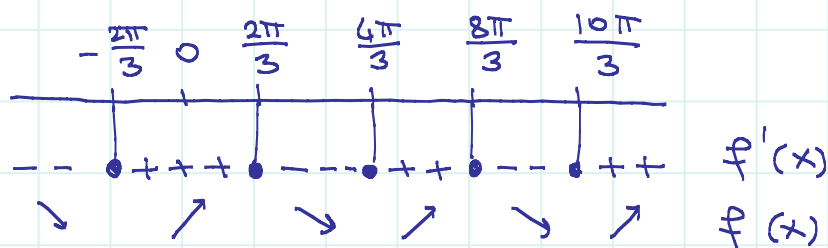
Ora invece considero $f(x) = x + 2 \sin x$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ anzi $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ f dispari

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \rightsquigarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva

$$f'(x) = 1 + 2 \cos x \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \geq -1 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2}$$

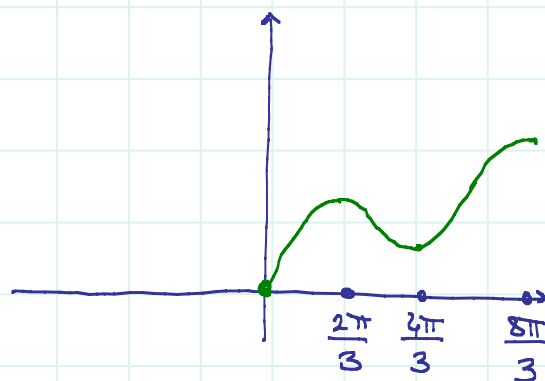
$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$



Domanda: qual è il segno di $f(x)$ in $\frac{4\pi}{3}$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 4 - \sqrt{3} > 0$$



A maggior ragione in tutti i pti di min. Loc. $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \geq 0$ avremo che

$$f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underbrace{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}_{\geq \frac{4\pi}{3}} + \underbrace{2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)}_{-\sqrt{3}} > 0$$

Conclusione : $x + 2 \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
 $x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 — 0 — 0 —

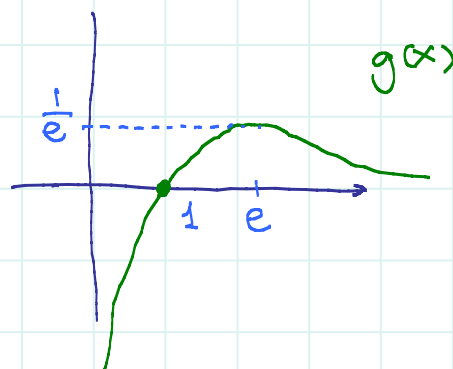
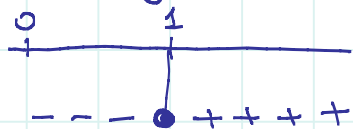
Esempio 2 Calcolare $\max \{ \sqrt[n]{n} : n \geq 1 \} = \max \{ 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots \}$

Considero la funzione $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log x}$

Conviene studiare direttamente $g(x) := \frac{\log x}{x}$

$g \in C^\infty((0, +\infty))$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$
 $\uparrow$
 $[-\infty, 0^+]$

zeri e segno dipendono da $\log x$

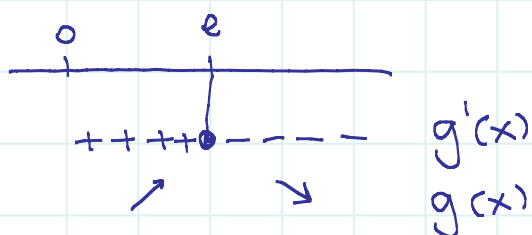


Mi aspetto un comportamento come in figura

Per avere conferma studio

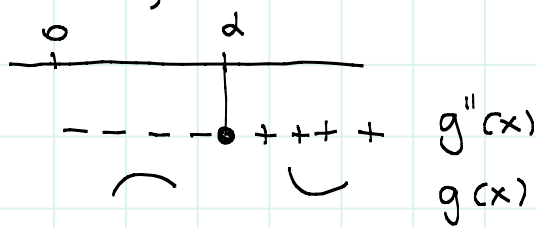
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \log x \geq 0 \Leftrightarrow \log x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$



↪ conferma il grafico di sopra

Oss. Dalla derivata seconda, che qui non serve, ci aspettiamo un segno del tipo in figura con $\alpha > e$

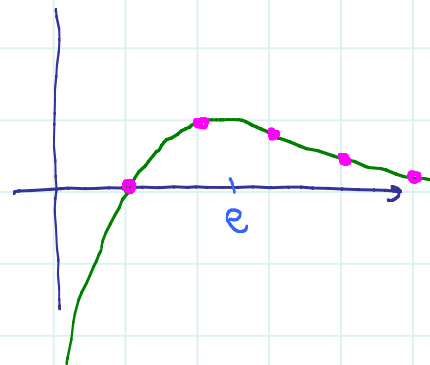


Tornando al vostro problema,
a voi interessa $x = n$ con $n \geq 1$
intero.

Qual è $\max \{g(n) : n \geq 1\}$

Se la giochiamo $n=2$ e $n=3$

(perché dopo 3 decresce e prima di 2 cresce)



Achtung! Non pensare che vince $n=3$ perché è più vicino a e !
(La funzione potrebbe precipitare di brutto dopo e)

In poche parole, se la giochiamo $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{3}$.

Elevo alla sesta e diventano 2^3 e 3^2 $\uparrow \uparrow$ max che cercavo.

Esempio 3 Fissato $a > 0$, quante sono le soluzioni di

$$a^x = x^a ?$$

[Ad esempio con $a=2$ diventa $2^x = x^2$, che ha come soluzioni
 $x=2$ e $x=4$. Saranno le uniche?]

La scrivo come $e^{x \log a} = e^{a \log x}$, cioè $x \log a = a \log x$
cioè

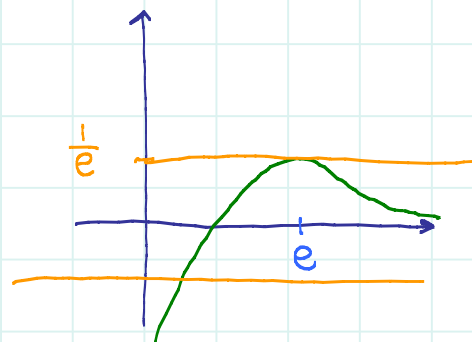
$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{g(x)}$

[Dividere si può perché cerco sol.
con $x > 0$]

Se g fosse iniettiva, l'unica solus. sarebbe $x=a$.

Ma g non è iniettiva.



Guardando il grafico, deduciamo che

- se $a \in (0, 1]$, allora $\frac{\log a}{a} \leq 0$, allora l'eq.
 $g(x) = \frac{g(a)}{\leq 0}$ ha una sola soluzione, che è $x = a$

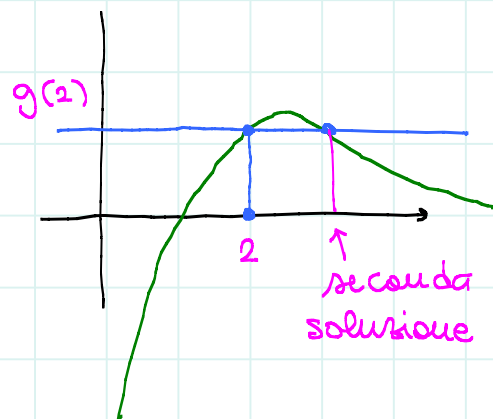
[Quindi se risolvo $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{2}}$ trovo unica sol. $x = \frac{1}{2}$]

- Se $a = e$, allora $g(a) = \frac{1}{e}$, e ancora una volta $g(x) = \frac{1}{e}$ ha come unica sol. $x = e$.

- Se $a \in (1, e) \cup (e, +\infty)$, allora $0 < g(a) < \frac{1}{e}$, e quindi dal grafico ci sono esattamente 2 sol. reali, di cui una è $x = a$.

Oss. Il secondo pallino ci dice che x^e ed e^x sono due grafici sono tangenti in $x = e$.

Oss. Risolvere $2^x = x^2$ sul grafico vuol dire come a dx



— o — o —