

Esempio 1 Dimostrare che $\sin x < x \quad \forall x > 0$ o più in generale
 $\sin x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $= 0$

Studio $f(x) = x - \sin x$

Ossevo che $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

Quindi $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con annullamento sporadico.

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. cresc.

Quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.



Esempio 2 Dimostrare che $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

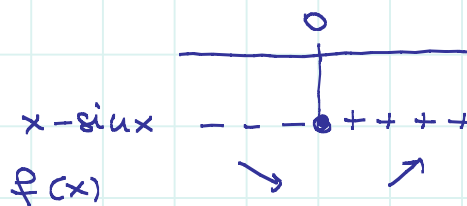
Pongo $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$

e ossevo che

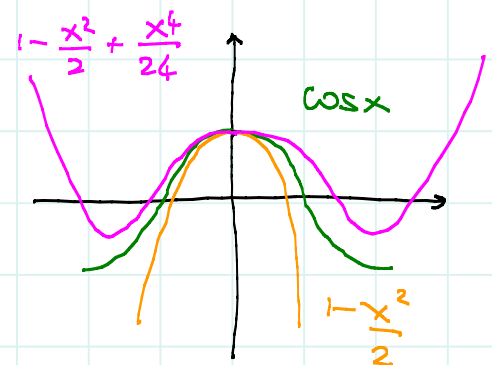
$$f(0) = 0$$

e

$$f'(x) = x - \sin x$$



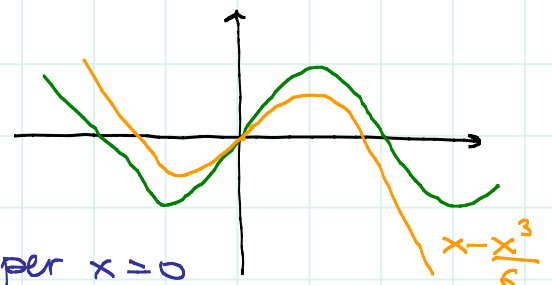
Questo basta per concludere



Esempio 3 Dimostrare che $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow x \geq 0$
 con uguaglianza solo per $x = 0$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \sin x \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0 \text{ con annullamento solo per } x = 0$$



Quindi $f(x)$ è strett. cresc., da cui le conclusioni ☺

La successiva sarà $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Morale: i polinomi di Taylor di $\sin x$ e $\cos x$ approssimano alternativamente dall'alto e dal basso le funzioni stesse

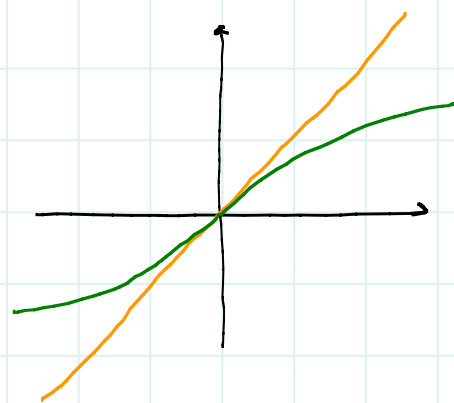
Esempio 4 Dimostrare che $\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$
 $\arctan x = x \Leftrightarrow x = 0$

Pongo $f(x) = x - \arctan x$

Anche qui $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

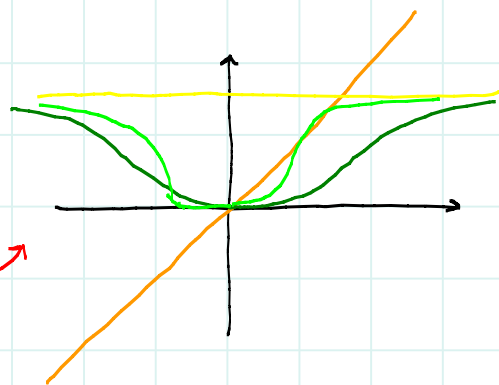
e si annulla solo per $x = 0$



Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. crescente.

Esempio 5 Risolve $\arctan(x^2) \leq x$

La sovrapposizione dei grafici è pericolosa ↗



Studio $f(x) = x - \arctan(x^2)$.

Osservo che $f(0) = 0$. Se fosse crescente ☺

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{x^4 - 2x + 1}{1+x^4}$$

non si trovano bene le radici

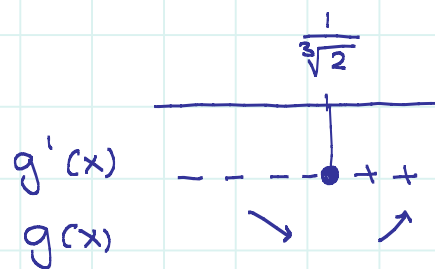
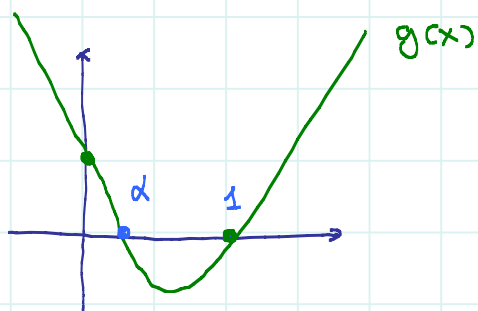
Oss. disfattista: guardo il numeratore $g(x) = x^4 - 2x + 1$.

Osservo che $g(1) = 0$ e $g'(x) = 4x^3 - 2$ da cui $g'(1) = 2$

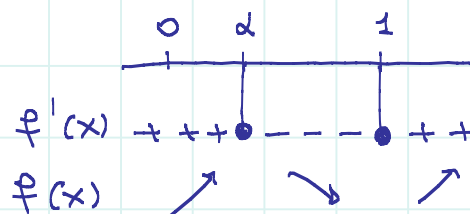
Quindi $g(x) < 0$ un po' prima di 1. Quindi $f'(x)$ non c'è speranza che sia positiva $\forall x > 0$.

Studio $g(x)$ (da cui dipende il segno di $f'(x)$)

Quando $g'(x) = 2(2x^3 - 1)$. Di questa so studiare il segno



Quindi $g(x)$ è come in figura, quindi ora conosco il segno di $f'(x)$

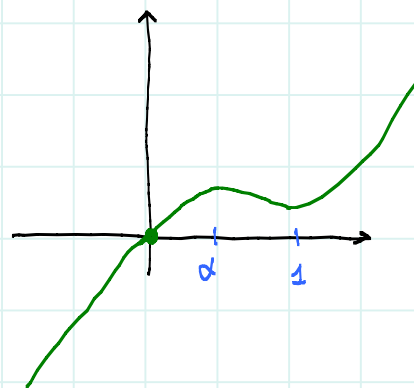


Quindi per decidere occorre vedere

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

Da questo momento sappiamo che

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$



Facile scorciatoia In questo caso

→ per $x < 0$ ovviamente $x < \arctan(x^2)$

→ per $x \in [0, 1]$ si ha $x^2 \leq x$, quindi

$$\arctan(x^2) \leq \arctan(x) \leq x$$

$\uparrow$
arctan
crescente

$\uparrow$
disug.
di prima

→ per $x \geq 1$ si ha $x^2 \geq x$, quindi

$$x^4 - 2x + 1 \geq x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$$

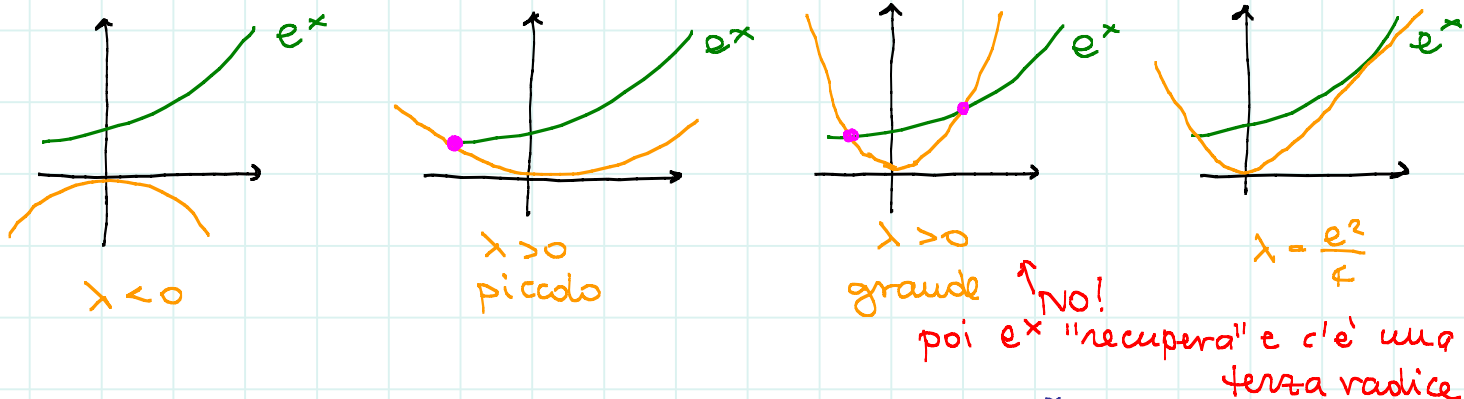
quindi $f'(x) > 0$, quindi f cresce e quindi ok.

L'ESEMPIO

Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di sol. di

$$e^x = \lambda x^2$$

Brutalmente



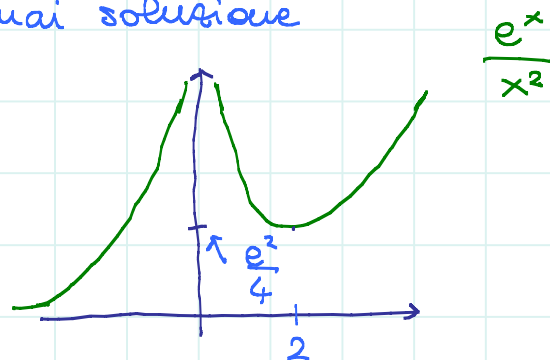
Dividendo mi trovo a studiare
(oppure $x^2 e^{-x} = \frac{1}{\lambda}$)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \lambda$$

↑
posso dividere per x^2
perché $x=0$ non è
mai soluzione

Studio $\frac{e^x}{x^2}$

I limiti a $\pm\infty$ e a $0^\pm$ si
calcolano facilmente



$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x}{x^3} (x-2)$$

Dallo studio del segno di f' [fare per bene] abbiamo
conferma del grafico.

Quindi le soluzioni sono

- 0 se $\lambda \leq 0$
- 1 se $0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$ (sol. neg.)
- 2 se $\lambda = \frac{e^2}{4}$
- 3 se $\lambda > \frac{e^2}{4}$ (una neg. due pos.)