

Motivi per fare uno studio di funzioni

- stabile iniettività e/o surgettività
- determinare $\inf / \sup / \min / \max$ in un insieme
- risolvere equazioni tipo $f(x) = 0$ o anche $f(x) = \lambda$
- risolvere disequazioni tipo $f(x) > 0$ oppure $f(x) \geq 0$.

Achtung! È pericoloso risolvere $f(x) = g(x)$ oppure $f(x) > g(x)$ confrontando i grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

Molto meglio passare nella forma

$f(x) - g(x) = 0$ oppure $f(x) - g(x) > 0$
e studiare $f(x) - g(x)$.

Esempio 1 Max / min $\{ |\cos x| : x \in [0, 7] \}$

Esistono per Weierstrass

Dal grafico segue che

- $\max = 1$. p.ti max: $x = 0$ $x = \pi$ $x = 2\pi$
 $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 bordo $\leftarrow$ $\leftarrow$ $\leftarrow$
 staz. interni
- $\min = 0$. p.ti min: $x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{2}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\leftarrow$ $\leftarrow$
 p.ti singolari interni



Come dimostro che $f'(\frac{\pi}{2})$ non esiste?

Idea: il limite del rapp. incrementale è diverso per $h \rightarrow 0^+$ e $h \rightarrow 0^-$

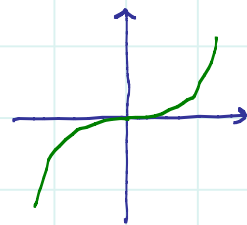
$$\frac{|\cos(\frac{\pi}{2} + h)| - |\cos \frac{\pi}{2}|}{h} = \frac{|-\sin h| - 0}{h} = \frac{\sin h}{h} \rightarrow 1 \quad h \rightarrow 0^+$$

$$\text{Per } h \rightarrow 0^- : \frac{|-\sin h| - 0}{h} = -\frac{\sin h}{h} \rightarrow -1$$

Achtung! $g(x) = |x| \cdot \sin x$ è derivabile in $x=0$?

$$\text{si! } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| \frac{\sin h}{h} = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
0 1



L'andamento nell'origine è di tipo x^2 per $x > 0$ e $-x^2$ per $x < 0$.

Esempio 2 Max/min $\{x^4 - x^2 : x \in [0, 1]\}$

Esistono per W. Candidati

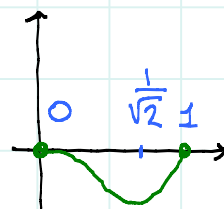
→ bordo: $x=0$ e $x=1$

→ sing. interni: $\emptyset$

→ staz. interni: devono esserci !!

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0$$

$x=0$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
↑ non vale	↑ lui ok	↑ non vale



Sostituisco: $f(0) = 0 \nearrow$ Max

$$f(1) = 0 \searrow$$

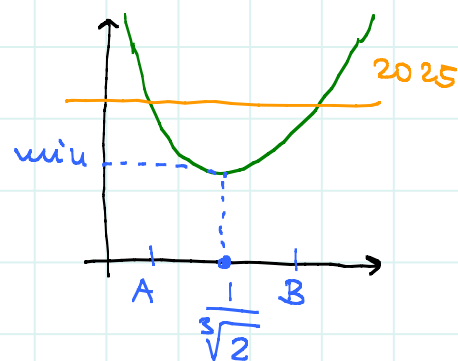
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \leftarrow \text{Min}$$

Esempio 3 Inf/Sup/min/max $\left\{\frac{1}{x} + x^2 : x > 0\right\}$

Weierstrass non si applica, quindi BOH

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup = +\infty$$

Max N.E.



Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ min. esiste

Esiste un intervallo $[A, B]$ con $0 < A < B$ t.c.

$$f(x) \geq 2025 \quad \forall x \in [0, A] \quad \text{e} \quad f(x) \geq 2025 \quad \forall x \geq B$$

La gara per il min si gioca in $[A, B]$

Il min sarà in un p.to stat. interno

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Il minimo sarà $f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

Esempio 6 $f(x) = x^3 - \arctan x$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

iniettiva? surgettiva?

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surgettiva perché continua + $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
quindi assume tutti i valori intermedi

Iniettiva NO perché $f(x) = 0$ ha almeno tre soluzioni

$$f(x) = -x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

quindi $f'(0) = -1$, quindi nell'origine sta scendendo

Detto più precisamente:

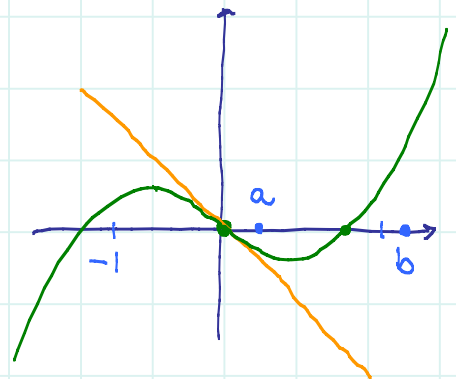
per monotonia 1 esiste $\delta > 0$ t.c.

$$f(x) < 0 = f(0) \quad \forall x \in (0, \delta)$$

Prendo $a \in (0, \delta)$ e ho $f(a) < 0$

Per il limite a $+\infty$ esiste $b > a$ t.c. $f(b) > 0$

Ora applico teo. esistenza degli zeri in $[a, b]$.



$f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ Per ora non è nemmeno chiaro che è ben definita!

Vediamo

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 1}{1+x^2}$$

Cerco i p.ti in cui si annulla
$$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$$

Prendiamo solo quello con il segno + e otteniamo

$$x^2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6} < 1$$

Di conseguenza, l'intervallo $[-1, 1]$ contiene i p.ti di max/min locali ma da solo esclude l'injectività. Andrebbe dimostrato, ma intuitivamente è chiaro.

Resta il dubbio sull'altezza dei p.ti di max/min.

Dovrei calcolare $f(x_{\min})$

→ se $\epsilon < -1$ non è ben definita

→ se $\epsilon > -1$ è ben definita ma non sing.

→ se $\epsilon = -1$ è " e sing.

Non serve fare il conto, ma solo osservare che $0 < x_{\min} < 1$ quindi

$$f(x_{\min}) \underset{\substack{\uparrow \\ x_{\min} \geq 0}}{\geq} -\arctan(x_{\min}) \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan(x_{\min}) < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}}}{\geq} -\frac{\pi}{4} > -1 \quad \ddot{\smile}$$

— 0 — 0 —