

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ qualunque, si dice Lipschitziana in D se esiste $L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D$$

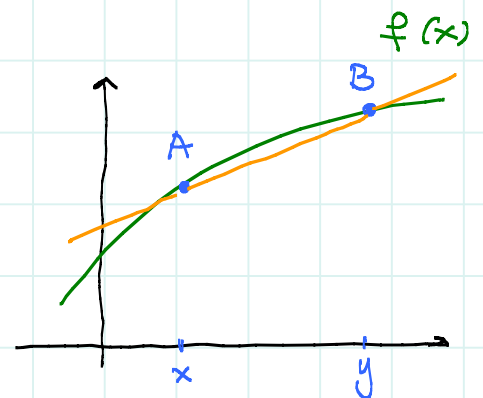
Osserviamo che, se un certo L va bene, allora vanno bene anche tutti gli $L' > L$. Il più piccolo L per cui la disuguaglianza è vera si dice costante di Lipschitz di f in D , ed è dato dalla formula

$$L := \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} : x \in D, y \in D, x \neq y \right\}$$

Interpretazione grafica Riscrivo la relazione come

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq L$$

↑
coeff. angolare
della retta AB



Quindi Lipschitzianità = bound sulle pendenze delle rette
= bound sulla pendenza del grafico.

Oss. Continuità: se y è vicino a x , allora $f(y)$ è vicino a $f(x)$
La Lipschitzianità rende la cosa quantitativa,

Achtung! La continuità è una proprietà locale, La Lip. è una proprietà globale.

Ad esempio

f continua in A + f continua in $B \Rightarrow f$ continua in $A \cup B$

" deriv. " " deriv. " $\Rightarrow f$ derivabile in $A \cup B$

f Lip. in A + f Lip in $B \not\Rightarrow f$ Lip in $A \cup B$

Esempio $A = (-1, 0)$ $B = (0, 1)$



Esempio 1 $f(x) = x^2$ è Lip. ? Risposta: DOVE ?
È Lip. in $\mathbb{R}$?

NO! Suppongo che lo sia: allora $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$
Uso $x=0$ e $y=m$. Viene $m^2 \leq Lm$, cioè $m \leq L$
che è impossibile per m grande.

È Lip. in $[0, 100]$?

SÌ! Con costante $L = 200$. Infatti

$$|y^2 - x^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 200 \text{ se } x \text{ e } y \text{ sono in } [0, 100]} |y-x| \leq 200 |y-x|$$

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[0, 1]$?

NO! $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ Uso $x=0$, $y = \frac{1}{n}$ Viene
 $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq L \frac{1}{n}$, cioè $\sqrt{n} \leq L$ che per n grande non
va bene

$f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[1, +\infty)$?

Brutta copia: $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \stackrel{?}{\leq} L |y - x|$, cioè

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \stackrel{?}{\leq} L |\sqrt{y} + \sqrt{x}| \cdot |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \quad 1 \stackrel{?}{\leq} L |\sqrt{y} + \sqrt{x}|$$

$$\frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \stackrel{?}{\leq} L \quad \text{Ok perché} \quad \frac{1}{|\sqrt{y} + \sqrt{x}|} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Bella copia: $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$

$$\leq |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2} |y - x|.$$

denom.
+ piccolo
— 0 — 0 —

Prop. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme **CONVESSO**.

Supponiamo che f sia derivabile in D .

Allora

$$f \text{ è lip. in } D \iff f' \text{ è limitata in } D$$

e inoltre

$$\text{cost. di lip. di } f \text{ in } D = \sup \{ |f'(x)| : x \in D \}$$

Oss. Con il senno di poi

- $f(x) = x^2$ in $[0, 100]$ $\rightsquigarrow f'(x) = 2x \rightsquigarrow \text{cost. di lip.} = 200$
- $f(x) = \sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$ $\rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightsquigarrow \text{cost. di lip.} = \frac{1}{2}$

Dim $\Leftarrow$ Ipotesi: $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in D$

Tesi: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|$ per ogni...

Lagrange! $|f(x_2) - f(x_1)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leq L} \cdot |x_2 - x_1|$

$\Rightarrow$ Ipotesi: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$ per ogni...

Tesi: $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in D$

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right|}_{\leq L \text{ (Lip. con } x_1 = x_0 \text{ e } x_2 = x_0+h)} \leq L$$

Resta da dimostrare per bene che

costante di Lip = bound. sulla derivata

Nella prima parte abbiamo che

costante di Lip $\leq$ bound su f'

Nella seconda parte abbiamo che

bound su $f' \leq$ costante di Lip

Quindi sono uguali $\therefore$.

Achtung! Una funzione può essere Lip. senza essere derivabile.

Esempio canonico: $f(x) = |x|$ che è Lip. su tutto $\mathbb{R}$, ma non derivabile in $x=0$.

Serve che $||y| - |x|| \leq |y - x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Segue da

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

che a sua volta si dimostra con tanti casi.

Poniamo $a = x$ e $b = y - x$ e troviamo

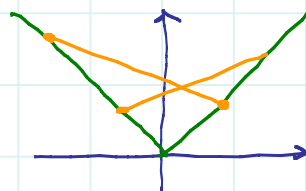
$$|y| \leq |x| + |y - x|$$

cioè

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

che dimostra la tesi quando $|y| \geq |x|$.

Il caso in cui $|y| \leq |x|$ si dimostra scambiando x e y



Disuguaglianze classiche di Lip.

Per ogni x, y in $\mathbb{R}$:

$$|\sin y - \sin x| \leq |y - x|$$

$$|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$$

$$|\arctan y - \arctan x| \leq |y - x|$$

Le derivate sono $\cos x$, $\sin x$, $\frac{1}{1+x^2}$ (tutta roba ≤ 1)

$\arcsin x$ è Lip. in $[-1, 1]$?

No! La derivata è $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e non è limitata nemmeno
in $(-1, 1)$
— 0 — 0 —