

TAYLOR - LAGRANGE

Teorema misterioso (Formula di Taylor con resto di Lagrange)

Setting: $r > 0$, $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che f sia derivabile almeno $m+1$ volte in $(-r, r)$.

Allora per ogni $x \in (-r, r)$ esiste c , compreso tra 0 e x , tale che

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_m(x)} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1}}_{\text{resto di Lagrange: come il termine successivo solo con la derivata calcolata in } c \text{ e non in } 0}$$

Inoltre, se $x \neq 0$, allora c è strettamente tra 0 e x .

Oss. C'è anche la variante con centro in $x_0 \neq 0$:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h^{m+1}$$

dove c , che dipende da h , sta tra x_0 e $x_0 + h$.

Oss. Nel caso $m=0$ la formula diventa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(c) \cdot h$$

cioè

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c) \cdot h$$

derivata in un p.to misterioso intermedio

↑ lunga. intervallo

che è il teorema di Lagrange.

Oss. Taylor - Peano è "qualitativo" (cioè il resto è piccolo al limite)
Taylor - Lagrange è "quantitativo", cioè fornisce una stima effettiva del resto.

Applicazioni : $\rightarrow$ calcolo approssimato di numeri
 $\rightarrow$ convergenza di serie di Taylor
 $\rightarrow$ dimostrazione di disuguaglianze

Esempio 1 Voglio calcolare $\sin \frac{1}{10}$.

Taylor-Lagrange con $n=4$ e $f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{f^{(5)}(c)}{120}x^5$$

$$\sin \frac{1}{10} = \underbrace{\frac{1}{10} - \frac{1}{6000}}_{\frac{599}{6000}} + \frac{f^{(5)}(c)}{120} \cdot \frac{1}{10^5}$$

Se io dico che $\sin \frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$, l'errore che commetto è

$$\frac{|f^{(5)}(c)|}{12.000.000} \leftarrow \text{in valore assoluto è } \leq 1, \text{ quindi}$$
$$\text{l'errore è } \leq \frac{1}{12.000.000}$$

$$\text{Riprova: } \frac{599}{6000} = 0,09983333\ldots \quad \sin \frac{1}{10} = 0,0998334\ldots$$

L'errore è sulla settima cifra.

Esempio 2 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$

Vorrei dire che

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Taylor-Lagrange: le somme parziali della serie sono i polinomi di Taylor di e^x , quindi

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

[$n+1$ nel resto aggiunto dopo video]

Qui c dipende da x e da n , e so solo che sta fra 0 e x .
Caso $x > 0$. Allora di sicuro $e^c \leq e^x$. Ma allora

$$\text{resto}(n) \leq \boxed{\frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

↓ perché fattoriale batte potenza.

Se $x < 0$, allora $c < 0$ e quindi $e^c \leq 1$.

Oss. Allo stesso modo si dimostra che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{e} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e idem per $\sin x$ e $\cos x$.

Esempio 3 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Per Leibnitz converge. Dico che la somma è $\log 2$.

Taylor-Lagrange con $f(x) = \log(1+x)$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Sostituisco $x=1$:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 1$$

Mi resta da stimare il resto. A suo tempo avevamo visto

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \dots \text{ per induzione}$$

Ponendo $x=c$ e $k=n+1$ troviamo che

$$|f^{(n+1)}(c)| = \frac{n!}{(1+c)^{n+1}} \leq n!$$

$\uparrow$
 $c \in (0,1) \Rightarrow$

$$\text{Quindi } |\text{resto}| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{e}$$

— o — o —

Esempio 4 Dimostrare che

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0 \quad (\leq \text{ per ogni } x \leq 0)$$

Taylor-Lagrange:

$$e^x = 1+x + \boxed{\frac{e^c}{2} x^2}$$

≥ 0 sempre!

$$e^x = 1+x + \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{e^c}{6} x^3}$$

ha un segno che dipende da x

Oss. Analogamente

$$e^x \geq P_{2m+1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x \geq P_{2m}(x) \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \leq P_{2m}(x) \quad \forall x \leq 0$$

Classi di regolarità

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso aperto (senza estremi) e sia $k \in \mathbb{N}$.

Si dice che $f \in C^k(D)$ se f è derivabile almeno k volte in D , e le sue prime k derivate sono funzioni continue.

Si dice che $f \in C^\infty(D)$ se $f \in C^k(D)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Si dice che $f \in C^\omega(D)$ (si legge C-omega) se è $C^\infty(D)$ e in D f è la somma della sua serie di Taylor.

Sinonimo: f è ANALITICA in D .

Esempi e^x , $\sin x$, $\cos x$ sono analitiche in $\mathbb{R}$

$\log(1+x)$ è analitica in $(-1, 1)$.

(dopo $x = -1$ la serie nemmeno converge!)

— 0 — 0 —