

Prop (Asintoti obliqui, versione a $+\infty$)

La retta $y = ax + b$, con $a \neq 0$, è asintoto obliquo per $f(x)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

se e solo se

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

Dim $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = a$$

$\downarrow \frac{0}{+\infty} = 0$
 $\downarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\underbrace{f(x) - ax - b}_{\downarrow 0} + b) = b$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\underbrace{f(x) - ax - b}_{\downarrow b} - b) = b - b = 0 \quad \therefore$$

Oss. Quando posso usare De L'Hôpital, allora

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

Esempio $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 8}$

Vediamo la zona di definizione $\Delta = 9 - 32 < 0$

Quindi $x^2 + 3x + 8 > 0$, quindi è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$

Audiamo agli asintoti : orizz. e verticali : nulla

Proviamo gli obliqui

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - x) = \frac{3}{2}$$

$\uparrow$
razionalizzo

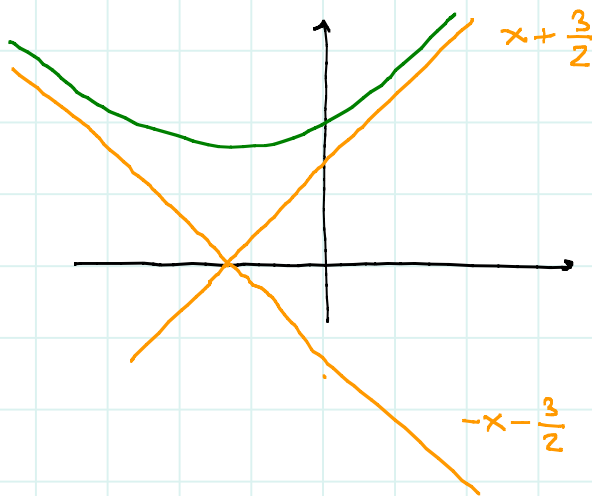
Quindi $y = x + \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

Vediamo a $-\infty$:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} + x)$$
$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{y^2 - 3y + 8} - y) = -\frac{3}{2}$$

Quindi $y = -x - \frac{3}{2}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

Grafico previsto:



Finestra sul futuro:
è un'iperbole

Oss. Potero vedere gli asintoti da Taylor?

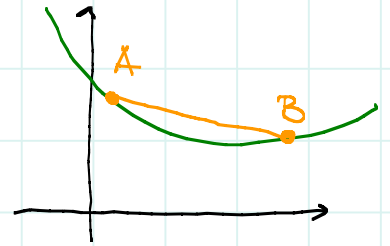
Certo! A $+\infty$ diventava

$$\sqrt{x^2 + 3x + 8} = x \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}} = x \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$
$$\begin{array}{c} \sqrt{1+t} \\ \uparrow \\ \text{teorema 0} \end{array} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$$
$$= \underbrace{x + \frac{3}{2}}_{\text{asintoto obliquo}} + o(1)$$

Def (geometrica di funzione convessa)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme convesso non banale (intervallo, semiretta o tutto $\mathbb{R}$) e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora f si dice convessa in D se per ogni coppia di p.ti A e B sul grafico, tutto il segmento AB sta sopra il grafico.



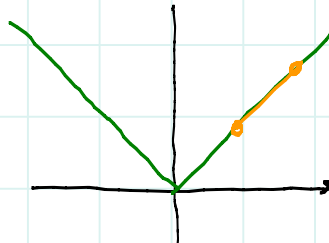
Concava: il segmento sta sotto (è come dire che $-f$ è convessa)

Strettamente convessa: il segmento tocca il grafico solo agli estremi.

Esempi



convessa } non
concava } strett.



debid. convessa
non strett. convessa

Teorema misterioso

Setting come sopra. Supponiamo che f'' esista in tutto D .

Allora

$$f \text{ debd. convessa in } D \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$$

$$f \text{ strett. convessa in } D \iff f''(x) > 0 \quad \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ in generale è falsa

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in D + f''(x) = 0$ solo sporadicamente $\Rightarrow f$ strett. convessa in D

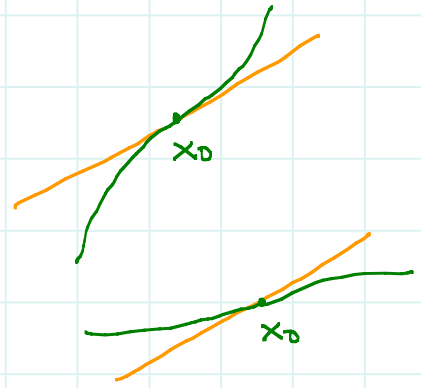
Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv., ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla per $x = 0$.

Def. (P.ti di flesso) Si dice che x_0 è un p.to di flesso per $f(x)$ se esiste $\delta > 0$ t.c.

$f(x)$ è convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$

$f(x)$ è concava in $(x_0 - \delta, x_0)$

o viceversa.



Moralmente: $f(x)$ cambia concavità in x_0
 $f''(x)$ cambia segno

Tornando all'esempio della lezione precedente

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad \dots \quad f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \quad (\text{COURTESY WOLFRAM})$$

Si vede che $f''(x)$ ha lo stesso segno di $f(x)$, il che trova conferma nel grafico.

Quindi l'unico p.to di flesso è l'origine.

Esempio Quante volte può annullarsi una $f(x)$ strett. convessa?

Al massimo 2. Se ce ne fossero 3, il segmento che congiunge la prima e l'ultima non potrebbe stare strett. sopra il grafico.

Due funz. strett. convesse senza tratti in comune, in quanti p.ti si possono intersecare?

Infinite! $f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + \sin x \leftarrow \text{è convessa}$
 $g'(x) = 2x + \cos x$ $g''(x) = 2 - \sin x \geq 1$