

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo: capire l'andamento di una funzione (come è fatto il grafico) in tutto il suo insieme di definizione.

ROAD MAP

- ① Simmetrie (pari / dispari / periodica)
- ② Zona di definizione e studio della continuità
- ③ Limiti agli estremi della zona di definizione
- ④ Zeri e segno
- ⑤ Derivata prima e zone di monotonia
- ⑥ P.ti di max / min globale / relativo
- ⑦ Eventuali asintoti
- ⑧ Derivata seconda, zone di convessità / concavità, flessi
- ⑨ LIPSCHITZIANITÀ (o più in generale modulo di continuità)

Esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

- ① Simmetrie $\left. \begin{array}{l} \text{Num. dispari} \\ \text{Den. pari} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{funzione dispari} \quad f(-x) = -f(x)$

Già ora sappiamo che basta studiare per $x \geq 0$

- ② Continuità Deve essere $x^2 \neq 1$, quindi $x \neq \pm 1$
Per il teorema è continua in $\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$

- ③ Limiti agli estremi Occorre fare 6 limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$\uparrow \frac{1}{0^+}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

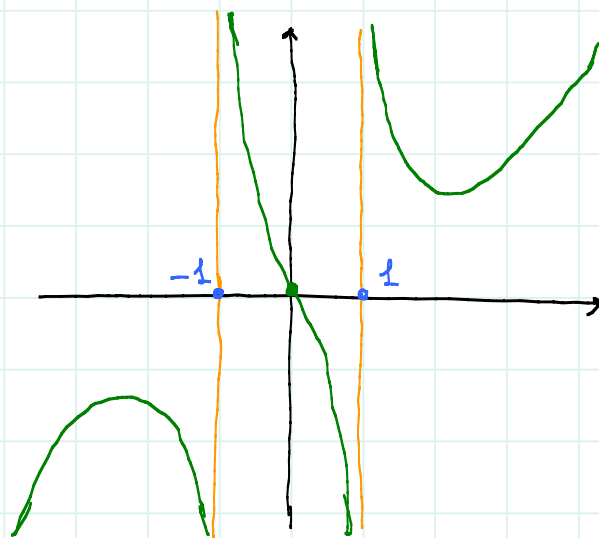
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$\uparrow \frac{1}{0^-}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Già ora provo a farmi un'idea del grafico.

Potrebbero esserci però molte più oscillazioni.



④ Zeri e segno

Dividere i numeri reali in 4 gruppi

- gli x per cui $f(x) = 0$
 - " " $f(x) > 0$
 - " " $f(x) < 0$
- } risolvere sia l'eq. sia le diseq.
- gli x per cui $f(x)$ non ha senso

Quindi

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

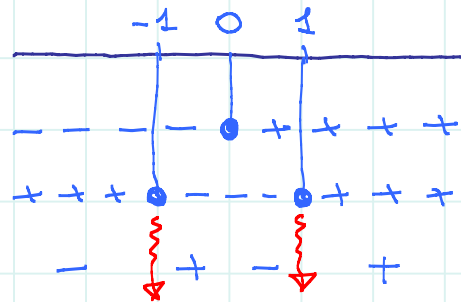
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

Questo conferma il grafico del p.to ③

x^3

$x^2 - 1$

$f(x)$



⑤ Derivata prima

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

Adesso studiamo il segno di $f'(x)$

	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
x^2	+	+	+	+	+
$(x^2-1)^2$	+	+	+	+	+
x^2-3	+	+	-	-	+
$f'(x)$	+	-	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↗

$f'(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{3}$ e
per $x = 0$

Il segno nei vari intervalli
è come in figura

Anche questo conferma il grafico che avevamo disegnato.

Achtung! Non è vero che $f(x)$ è decrescente in $(0, \sqrt{3})$

Ad esempio $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{3}{2})$
 $\uparrow$ neg. $\uparrow$ pos.

È vero che $f(x)$ è decrescente in $(0, 1)$ e in $(1, \sqrt{3})$

Il teorema monotonia 2 richiede $f(x)$ definita in tutto
l'intervallo, quindi in $(0, \sqrt{3})$ non si può applicare!

⑥ Max/min loc./glob.

$\uparrow$
situation di relativo

Dallo studio di $f'(x)$ deduciamo che

- $x = \sqrt{3}$ è p.to di min. loc.
- $x = -\sqrt{3}$ " max loc.
- non esiste p.to di max/min. globale

Nota bene: $x=0$ è p.to di flesso a tang. orizz. discendente.

Taylor: $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

⑦ Asintoti

- Verticali: $x = 1$ e $x = -1$
- Orizzontali: nulla
- Obliqui

Def. → Una retta $x = x_0$ è asintoto verticale per $f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

↑
VEL

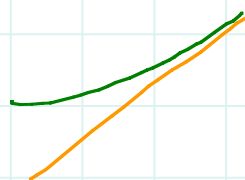
→ Una retta $y = y_0$ è asintoto orizz. per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se
per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = y_0$$

→ Una retta $y = ax + b$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$
se $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

↑
Brutalmente: la
funzione tende alla
retta



Oss. L'asintoto obliquo è equivalente a dire che

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (o \text{ per } x \rightarrow -\infty)$$

Oss. In modo analogo posso dire che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$
per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Domanda: come trovo a e b ?

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

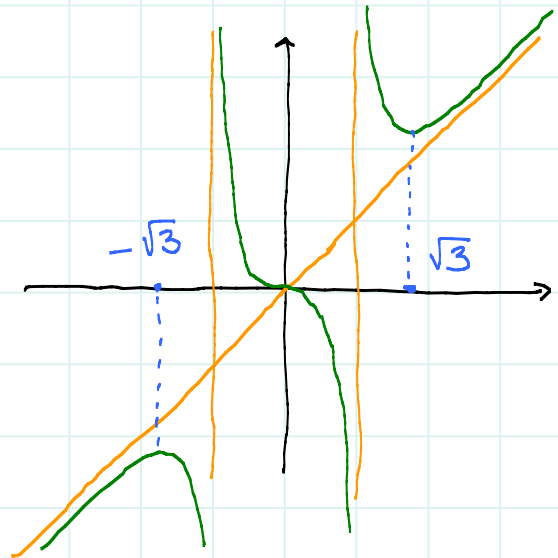
e idem a $-\infty$.

Nel vostro caso $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$

e

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2-1} = 0$$

Conseguenza: la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$
 Per disparità (o per un conto analogo) è asintoto obliquo anche per $x \rightarrow -\infty$.



Oss. Potero vedere l'asintoto obliquo da Taylor

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{raccolgo} \\ x^2 \text{ sotto} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ t \text{ che} \\ \text{tende a } 0 \end{array} = x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots \right) \\
 &\quad \frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\dots \quad \text{asintoto obliquo} \\
 &= x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \overset{\downarrow}{x} + o(1) \\
 &\quad \text{per } x \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$